



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Meios Anisotrópicos com Álgebra Geométrica

Marlene Lucete Matias Rocha

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Júri

Presidente: Professor Doutor Fernando Duarte Nunes

Orientador: Professor Doutor António Luís Campos da Silva Topa

Vogal: Professor Doutor Manuel Ventura Guerreiro das Neves

Setembro 2012

Agradecimentos

Um especial agradecimento ao professor Doutor António Topa por ter aceitado a me orientar, pela disponibilidade, orientação e principalmente pelos valiosos esclarecimentos e ajudas que me facultou e conhecimentos que me foram transmitidos e pelo acompanhamento e revisão atenta que concedeu esta dissertação.

Aos meus pais, pelo estímulo e apoio incondicional que me proporcionaram tanto na vida académica, pessoal, profissional e pelo sacrifício que fizeram para me possibilitarem a realização deste curso.

Aos meus irmãos e família pelo apoio incondicional e incentivo.

A todos os meus colegas, e amigos em especial a Elizângela Furtado, Dórise Lima, Kathia Amarante, pelo incentivo incondicional demonstrado, companheirismo e a todos os que de uma forma ou de outra me ajudaram a terminar esta dissertação, o meu profundo reconhecimento e agradecimento.

Resumo

Nesta dissertação é apresentado um novo formalismo matemático, designado por álgebra geométrica ou de Clifford. Começa-se por abordar os conceitos bases desta álgebra, introduzindo a definição base, o produto entre vectores: o produto geométrico. Com base neste produto, surge dois novos objectos geométricos, o bivector e o trivector e conceitos importantes como os rotores e as contracções.

Introduz-se o conceito de anisotropia e demonstra-se a aplicação da álgebra geométrica aos cristais anisotrópicos uniaxiais e biaxiais de uma forma menos complexa utilizando um sistema de coordenadas livre para analisar a propagação das ondas electromagnéticas em meios anisotrópicos obtendo as ondas características e as relações constitutivas dos cristais, e por fim como aplicação nos meios anisotrópicos são analisadas as placas retardadoras de meia onda, um quarto de onda e onda completa.

Palavras-chave

Álgebra geométrica, produto exterior, produto geométrico, meios anisotrópicos, cristais uniaxiais, cristais biaxiais.

Abstract

This thesis deals with a new mathematical formalism: geometric algebra or Clifford algebra. It begins by addressing the bases of this algebra concept, introducing the basic definition: the geometric product. Based on this product, two new geometric objects appear: the bivector and the Trivector, and related important concepts such as rotors and contractions.

The concept of anisotropy is introduced and we demonstrate the application of geometric algebra to uniaxial and biaxial anisotropic crystals. In a less complex way, we use a coordinate free system to analyze the propagation of electromagnetic waves in anisotropic media, obtaining its characteristic waves and the constitutive relationships of the crystals. Finally, as an application to anisotropic media, half wave, quarter-wave and full wave retarder plates are analyzed.

Keywords

Geometric algebra, bivector, trivector, geometric product, anisotropic media, uniaxial crystal and biaxial crystal.

Índice

Lista de Figuras	v
Lista de Símbolos	vii
Lista de Tabelas	xiii
Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1 Enquadramento Histórico	2
1.2 Objectivos	5
1.3 Organização e Estrutura	5
1.4 Contribuições	6
Capítulo 2	7
Introdução à Álgebra Geométrica	7
2.1 Produto Geométrico ou de Clifford	8
2.2 Álgebra Geométrica do Plano	14
2.3 Álgebra Geométrica do Espaço	16
2.4 Rotores e Contracções	20
2.4.1 Reflexões e rotações no plano	21
2.4.2 Reflexões e Rotações no Espaço	22
2.4.3 Contracções	26
2.5 Conclusões	31
Capítulo 3	33
Teoria de Funções Lineares	33
3.1 Corpo	34
3.2 Espaços lineares	34
3.3 Funções lineares	35
3.3.1 Determinante de uma função linear	37
3.3.2 Adjunta de uma função linear	38

3.3.3 Funções simétricas e anti-simétricas	38
3.3.4 Inversa de uma função linear.....	39
3.3.5 Álgebra e estruturas quadráticas.....	39
3.4 Conclusão	41
Capítulo 4	43
Meios Anisotrópicos.....	43
4.1 Equações de Maxwell.....	44
4.1.1 Equações de Maxwell-Boffi.....	47
4.2 Anisotropia em Álgebra Geométrica.....	48
4.2.1 Anisotropia eléctrica	49
4.2.2 Propagação das ondas electromagnéticas em meios anisotrópicos	58
4.2.2.1 Cristais Uniaxiais	58
4.2.2.2 Cristais biaxiais	63
4.3 Conclusões.....	65
Capítulo 5	67
Aplicações	67
5.1 Placas Retardadoras.....	68
5.2 Placas de meia onda.....	70
5.3 Placas de quarto de onda	71
5.4 Placas de ordem múltipla.....	72
5.4 Birrefringência em Meios Anisotrópicos	74
5.5 Conclusão	76
Capítulo 6	77
Conclusões.....	77
6.1 Conclusão final.....	78
6.2 Perspectiva de trabalhos futuros	79
Referências	81
Apêndice A.....	83

Lista de Figuras

Figura 1.1: Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), [1].....	2
Figura 1.2: Herman Gunter Grassmann (1809-1877), [2].....	2
Figura 1.3: William Kingdon Clifford (1845-1879), [3].....	3
Figura 1.4: Josiah Willard Gibbs (1839-1903), [3].....	3
Figura 1.5: David Orlin Hestenes (1833-?), [4].....	4
Figura 2.1: Representação do bivector $\hat{\mathbf{F}}$	9
Figura 2.2: Representação do bivector $\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	11
Figura 2.3: Representação do subespaço $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ dos bivectores de $\mathbb{C}\ell_3$	11
Figura 2.4: Representação do trivector unitário $\mathbf{i} = \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$	12
Figura 2.5: Representação do produto exterior de três vectores	13
Figura 2.6: Dualidade entre o produto externo de Gibbs e o produto exterior de Grassmann	19
Figura 2.7: Reflexão do vector \mathbf{r} em relação ao vector \mathbf{a}	21
Figura 2.8: Rotação de um vector \mathbf{r} para o vector \mathbf{r}''	22
Figura 2.9: Reflexão do vector \mathbf{r} em relação ao eixo (vector) e a um plano (bivector).....	23
Figura 2.10: Rotação do vector $\mathbf{r} \in \mathbb{C}\ell_3$ de um ângulo θ no plano do bivector unitário $\hat{\mathbf{B}}$	25
Figura 2.11: Representação do produto geométrico um vector \mathbf{a} por um bivector \mathbf{B}	28
Figura 2.12: Interpretação geométrica da contração $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B}$	30
Figura 3.1: Aplicação de uma função linear ε à base de vectores ortonormada $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$	37
Figura 4.1: Caracterização da anisotropia através do bivector $\mathbf{F} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}$	49
Figura 4.2: Representação dos vectores \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 , que definem o operador linear ε como sendo operador biaxial.....	52
Figura 4.3: Representação dos vectores \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 , que caracterizam ε e \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 que caracterizam η no meio biaxial.....	56
Figura 4.4: Representação da onda ordinária e onda extraordinária para um cristal uniaxial positivo, $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$	62
Figura 4.5: Representação da onda ordinária e extraordinária para um cristal uniaxial negativo, $\varepsilon_{\parallel} < \varepsilon_{\perp}$	62
Figura 4.6: Representação dos índices de refração correspondentes as ondas características ..	64
Figura 5.1: Placa retardadora de material anisotrópico transparente	68
Figura 5.2: Rotação da polarização linear por uma placa de meia onda	70

Figura 5.3: Conversão da polarização linear e circular por uma placa de quarto de onda	71
Figura 5.4: Interferência entre o meio (1) isotrópico e o meio (2) cristal uniaxial positivo.....	75

Lista de Símbolos

$\mathbb{C}\ell_2$	Álgebra geométrica do plano
$\mathbb{C}\ell_3$	Álgebra geométrica do espaço
$\mathbb{C}\ell_{1,3}$	Álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski
\mathbb{R}	Espaço linear unidimensional
\mathbb{R}^2	Espaço linear bidimensional
\mathbb{R}^3	Espaço linear tridimensional
δ_{jk}	Delta de kronecker
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	Vectores unitários da álgebra geométrica do plano
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Vectores unitários da álgebra geométrica do espaço
\mathcal{B}	Base ortonormada do espaço
\mathbf{F}	Bivector
$\hat{\mathbf{F}}$	Bivector unitário
(\cdot)	Produto Interno
(\times)	Produto externo
(\wedge)	Produto exterior
(\oplus)	Soma graduada
$(\)$	Produto geométrico
$\det ()$	Determinante de uma função linear
$\overset{2}{\wedge} \mathbb{R}^2$	Subespaços dos bivectores no espaço bidimensional

$\wedge^2 \mathbb{R}^3$	Subespaços dos bivectores no espaço tridimensional
$\wedge^3 \mathbb{R}^3$	Subespaços dos trivectores no espaço tridimensional
\mathbf{V}	Trivector
$\hat{\mathbf{V}}$	Trivector unitário
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	Vector no espaço
u	Multivector (elemento genérico da álgebra geométrica)
$\langle u \rangle_n$	Projecção de u em relação ao grau n
(\hat{u})	Involução de grau
(\tilde{u})	Reversão
(\bar{u})	Conjugação de Clifford
$\langle \mathbf{R} \rangle_0$	Componente de grau zero do rotor
$\langle \mathbf{R} \rangle_2$	Componente de grau dois do rotor
$\text{Cen}(\)$	Centro da álgebra
\mathbb{H}	Quaterniões de Hamilton
$\mathbb{C}\ell^+$	Parte par de uma álgebra de Clifford
$\mathbb{C}\ell^-$	Parte ímpar de uma álgebra de Clifford
(\mathbf{r}')	Reflexão de um vector \mathbf{r}
(\mathbf{r}'')	Dupla reflexão ou rotação do vector \mathbf{r}
$(\)_{\parallel}$	Componente paralela de um vector
$(\)_{\perp}$	Componente perpendicular de um vector
\mathbf{R}	Rotor

\mathbf{n}, \mathbf{m}	Vectores unitários
\lrcorner	Contracção a esquerda
\llcorner	Contracção a direita
\mathbb{H}	Quaterniões de Hamilton
\mathbb{C}	Corpo
\mathbf{E}	Campo eléctrico
\mathbf{B}	Campo magnético
\mathbf{D}	Excitação eléctrica
\mathbf{H}	Campo de magnetização
∇	Operador nabla
\mathbf{P}	Polarização eléctrica
\mathbf{M}	Magnetização
\mathbf{J}	Densidade de corrente
\mathbf{J}_p	Densidade de corrente associada à polarização
\mathbf{J}_m	Densidade de corrente associada à magnetização
\mathbf{J}_t	Densidade de corrente total de carga
ϱ	Densidade de carga eléctrica
ϱ_t	Densidade total de carga eléctrica
ϱ_p	Densidade de carga associada à polarização
ε	Permitividade eléctrica
ε_0	Permitividade eléctrica no vácuo
ε_r	Permitividade eléctrica relativa
μ	Permeabilidade magnética

μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
η_0	Impedância do vácuo
c	Velocidade da luz
\mathbf{E}_0	Campo eléctrico numa região sem fonte
\mathbf{B}_0	Campo magnético numa região sem fonte
\mathbf{D}_0	Excitação eléctrica numa região sem fonte
\mathbf{H}_0	Excitação magnética numa região sem fonte
ω	Frequência angular
t	Tempo
k_0	Constante de propagação no vácuo
\mathbf{k}	Constante de propagação
$\hat{\mathbf{k}}$	Vector unitário que caracteriza o vector \mathbf{k} da constante de propagação
\mathcal{E}	Função dieléctrica
η	Função de impermeabilidade
n	Índice de refacção efectivo
\mathbf{n}	Vector índice refacção efectivo
v_o	Velocidade de onda ordinária
v_e	Velocidade de onda extraordinária
l	Espessura da placa
δ	Diferença de fase
λ_0	Comprimento de onda no vazio
Δn	Variação da birrefringência

n_e Índice de refração extraordinária

n_o Índice de refração ordinária

Lista de Tabelas

Tabela I: Tabela multiplicativa de $\mathbb{C}\ell_2$ 15

Tabela II: Tabela multiplicativa de $\mathbb{C}\ell_3$ 17

Capítulo 1

Introdução

O actual capítulo constitui uma primeira abordagem à presente dissertação, dando uma visão geral sobre o tema apresentado e os objectivos subjacentes. Pretende apresentar uma síntese dos seus contributos originais, as razões que as justificam e os avanços que tem sido feito na área. Especifica ainda a sua estrutura e organização.

1.1 Enquadramento Histórico

A história da álgebra geométrica começa na Grécia antiga ([1] e [3]) com escrita de relações geométricas de forma algébrica, contudo o formalismo inerente à álgebra geométrica como ferramenta matemática com aplicação nas mais variadas áreas dos dias de hoje, apenas teve início no século XIX.

Em 1843, o matemático Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) na tentativa de resolver o problema das rotações as três dimensões generalizou os números complexos para as três dimensões, dando origem aos quaterniões de Hamilton.

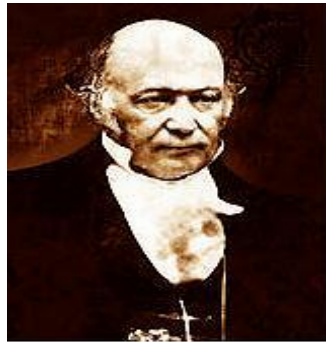


Figura 1.1: Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), [1]

Um ano depois, em 1844 Herman Gunter Grassmann (1809-1877), desenvolve a própria álgebra dando origem ao produto exterior, provando que a relação em álgebra geométrica não se encontra restrita a três dimensões, ou seja, o produto exterior é definível em n dimensões. Este produto é caracterizado pelas propriedades de associatividade e anti-comutatividade e também por ser um produto que não depende de qualquer métrica.

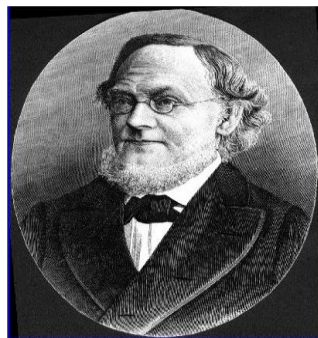


Figura 1.2: Herman Gunter Grassmann (1809-1877), [2]

William Kingdon Clifford (1845-1879) um matemático inglês que em 1878 unificou numa estrutura algébrica as álgebras de Hamilton e de Grassmann, dando origem à álgebra geométrica. Esta álgebra se caracteriza por um produto de dois vectores a que se designa produto geométrico. Este produto é associativo como o produto externo de Grassmann mas é invertível como os quaterniões de Hamilton

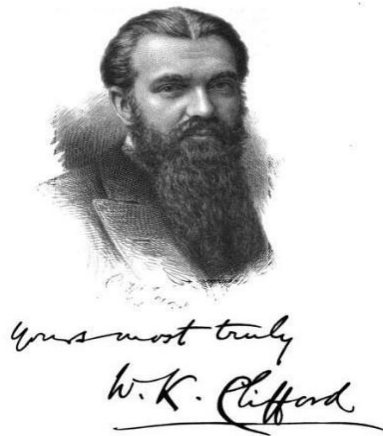


Figura 1.3: William Kingdon Clifford (1845-1879), [3]

Nos finais do século XIX surge o produto externo de Josiah Willard Gibbs (1839-1903), que é usual do espaço tridimensional ou seja é definido em três dimensões. Em duas dimensões não é possível sair do plano para introduzir um vector perpendicular ao plano e em quatro dimensões ortogonal ao plano não está univocamente determinada. E ainda de salientar que o facto do produto externo de Gibbs necessita de uma métrica ao contrário do produto exterior que não depende de qualquer métrica. No entanto estas dificuldades podem ser superadas se em vez da álgebra de Lie definida pelo produto externo dos dois vectores adoptar a álgebra geométrica proposta por Clifford.

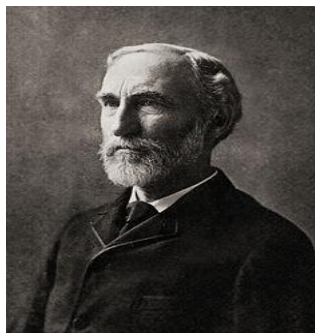


Figura 1.4: Josiah Willard Gibbs (1839-1903), [3]

Apenas no início do século XX, Einstein publica a teoria da relatividade restrita em 1905, e se passa a ter necessidade de trabalhar com quatro dimensões, começa-se a por em causa o produto externo de Gibbs e consequentemente começam a pensar na utilidade dos estudos de Grassmann e mais no concretamente por Clifford, mas no entanto só em 1920 que álgebra geométrica reaparece na forma de matrizes spin indispensáveis a mecânica quântica.

Em 1970, David Orlin Hestenes (1933-), quando aprofundou os seus conhecimentos na mecânica quântica percebeu que a álgebra geométrica podia ser uma linguagem matemática unificadora de muitas áreas da mesma.

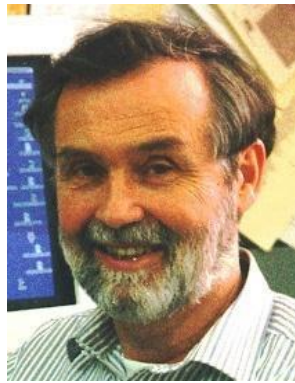


Figura 1.5: David Orlin Hestenes (1933-?), [4]

A álgebra Geométrica pode ser utilizada em vários campos da física, tal como na relatividade geral e restrita, mecânica quântica não relativista e relativista, mecânica clássica, electromagnetismo, processamento de imagem e visão, robótica, cristalografia, óptica geométrica, rede de computadores, entre muitas outras áreas.

1.2 Objectivos

Esta dissertação tem como objectivo apresentar os fundamentos da álgebra geométrica e mostrar algumas aplicações deste formalismo matemático para os meios anisotrópicos em particular nos cristais uniaxiais e biaxiais. Paralelamente este objectivo, também está implícito divulgar a álgebra geométrica como uma linguagem matemática unificadora e global, nas mais diversas áreas de engenharia e nos mais diversos problemas, no caso concreto de electromagnetismo e a sua aplicação aos meios anisotrópicos.

1.3 Organização e Estrutura

A presente dissertação está dividida em seis capítulos, sendo o primeiro e ultimo respectivamente a introdução e a conclusão. Assim o corpo principal assente nos restantes quatro capítulos intermédios que providenciam várias abordagens sobre aplicação da álgebra geométrica aos meios anisotrópicos.

O primeiro capítulo descreve a evolução histórica dos estudos e as suas aplicações nesta área e ainda os objectivos e as suas contribuições.

No segundo será abordado as bases da álgebra geométrica particularizadas para espaços bidimensionais e tridimensionais euclidianas. Defina-se também o produto geométrico e por fim aborda dois conceitos importantes da álgebra geométrica: os rotores e as contracções.

No terceiro capítulo são apresentados vários conceitos importantes para aplicação da álgebra geométrica aos meios anisotrópicos: o corpo, as funções lineares, espaços lineares.

O capítulo quarto apresenta uma nova abordagem a anisotropia no âmbito do electromagnetismo. Este novo método utiliza um sistema de coordenadas livre para analisar a propagação das ondas electromagnéticas em meios anisotrópicos. E para terminar este capítulo faz-se um estudo dos cristais uniaxiais e cristais biaxiais.

No capítulo cinco é apresentada algumas aplicações dos meios anisotrópicos, neste caso as placas retardadoras, placas de meia onda, placas de quarto-de-onda e placas retardadoras de ordem múltipla.

Por fim o capítulo seis apresenta-se uma síntese das principais conclusões desta dissertação e perspectivas futuras.

1.4 Contribuições

Habitualmente o cálculo tensorial ou diádico tem sido a forma mais comum de introduzir a anisotropia no âmbito de electromagnetismo, porém esta dissertação apresenta-se um método novo para analisar a propagação das ondas electromagnéticas em meios anisotrópicos. Este novo procedimento utiliza um sistema de coordenadas livre, que permite uma abordagem essencialmente geométrica da anisotropia, isto é independentemente de quaisquer coordenadas e onde o conceito de tensor é desnecessário.

Capítulo 2

Introdução à Álgebra Geométrica

Neste capítulo é introduzido a álgebra geométrica $\mathbb{C}\ell_3$, do espaço ordinário tridimensional, com métrica euclidiana. O objectivo é o de apenas introduzir alguns conceitos básicos para melhor compreender aplicação desta álgebra aos meios anisotrópicos, como por exemplo: o produto geométrico, produto exterior, bivectores, trivectores, contracção e rotação. E por fim caracteriza-se a estrutura algébrica da álgebra geométrica do plano $\mathbb{C}\ell_2$ e do espaço $\mathbb{C}\ell_3$.

2.1 Produto Geométrico ou de Clifford

Na álgebra geométrica de Clifford admite-se que existe um espaço linear (ou vectorial) \mathbb{R}^n definido sobre o corpo \mathbb{R} dos números reais. Esta álgebra pode ser euclidiana ou não euclidiana. No que se refere a álgebra euclidiana temos:

$$\mathbb{C}\ell_2 \rightarrow \text{Álgebra geométrica do plano}$$

$$\mathbb{C}\ell_3 \rightarrow \text{Álgebra geométrica do espaço}$$

A álgebra geométrica permite também estudar outras dimensões e outras métricas como por exemplo: o de espaço de tempo Minkowski em que a métrica não é euclidiana. Neste caso considera-se a álgebra geométrica $\mathbb{C}\ell_{1,3}$ que radica no espaço quadrático $\mathbb{R}^{1,3}$.

A definição essencial da álgebra geométrica é o produto geométrico (ou de Clifford) entre vectores.

Considerando o espaço linear \mathbb{R}^3 com métrica euclidiana e uma base ortonormada $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$, i.e.,

$$j, k \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (2.1)$$

de modo que $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$. Dado um vector $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, o seu comprimento será dado por

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0 \quad (2.2)$$

O produto entre vectores, ou produto geométrico, é definido tal que ao multiplicar o vector \mathbf{r} por ele próprio, $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^2$, se obtém o quadrado do seu comprimento. Isto significa que, $\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2$. Assim chega-se ao axioma fundamental de $\mathbb{C}\ell_3$.

Particularizando, obtém-se $\mathbf{e}_1^2 = |\mathbf{e}_1|^2 = 1$, $\mathbf{e}_2^2 = |\mathbf{e}_2|^2 = 1$, $\mathbf{e}_3^2 = |\mathbf{e}_3|^2 = 1$. Se não considerar que a partida que o produto é (necessariamente) comutativo, tem-se,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}| &= x^2 + y^2 + z^2 = \mathbf{r}^2 = (\mathbf{x}\mathbf{e}_1 + \mathbf{y}\mathbf{e}_2 + \mathbf{z}\mathbf{e}_3)(\mathbf{x}\mathbf{e}_1 + \mathbf{y}\mathbf{e}_2 + \mathbf{z}\mathbf{e}_3) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2 + xy(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + xz(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) + yz(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\therefore \mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \end{cases} \tag{2.4}$$

Conclui-se então que no caso geral o produto geométrico não pode ser comutativo, admita-se então que é associativo, ou seja

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}) \tag{2.5}$$

Obtém-se então

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = -(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 = -1 \tag{2.6}$$

Visto que o quadrado de $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ é negativo, não pode ser nem um escalar nem um vector o que significa que se trata de um bivector. Um bivector representa uma área orientada, que pode possuir um sentido horário ou anti-horário. $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}$

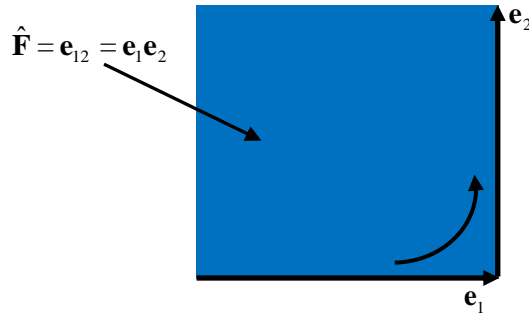


Figura 2.1: Representação do bivector $\hat{\mathbf{F}}$

De forma análoga define-se os bivectores unitários deste espaço $\mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Deste modo, o produto geométrico de dois vectores $\mathbf{a}\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, com $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, vem dado por:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rightarrow \text{Produto geométrico} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \rightarrow \text{Produto interno ou escalar} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Produto exterior ou de Grassmann} \quad (2.9)$$

A definição do produto geométrico implica a existência de um outro produto para além do conhecido produto interno entre vectores $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$. Este produto é o produto exterior de Grassmann que gera um bivector $\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_{23} + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_{31} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_{12} \in \wedge^2 \mathbb{R}^3 \quad (2.10)$$

Conclui-se que o objecto $u = \mathbf{ab}$ é a soma graduada de um escalar α com um bivector \mathbf{F} .

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \quad (2.11)$$

Considerando a propriedade de simetria do produto interno e de assimetria do produto exterior tem-se que:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \rightarrow \text{Simetria} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \rightarrow \text{Anti-Simetria} \quad (2.13)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{ba} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \end{vmatrix} \quad \therefore (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \quad (2.14)$$

$$\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (2.15)$$

$$\therefore (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \cos^2 \theta - \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 = -\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \sin^2 \theta \quad (2.16)$$

$$\therefore |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{F}| = \beta = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \quad (2.17)$$

O resultado obtido mostra que o bivector \mathbf{F} codifica um plano orientado cuja área é dada por β , que representa a área do paralelogramo da figura abaixo.

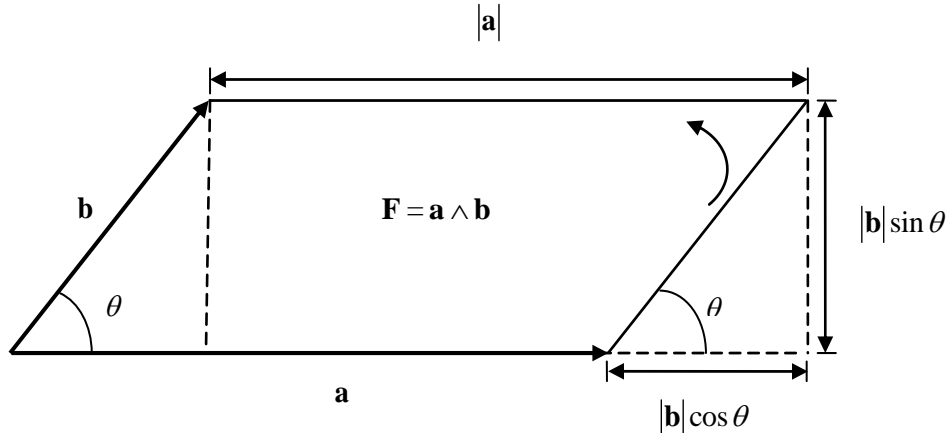


Figura 2.2: Representação do bivector $\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$

A definição do produto geométrico $u = \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ entre dois vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ codifica geometricamente a relação entre eles como a seguir se indica:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} = \mathbf{ba} &\Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{ab} = -\mathbf{ba} &\Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{ab} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.18)$$

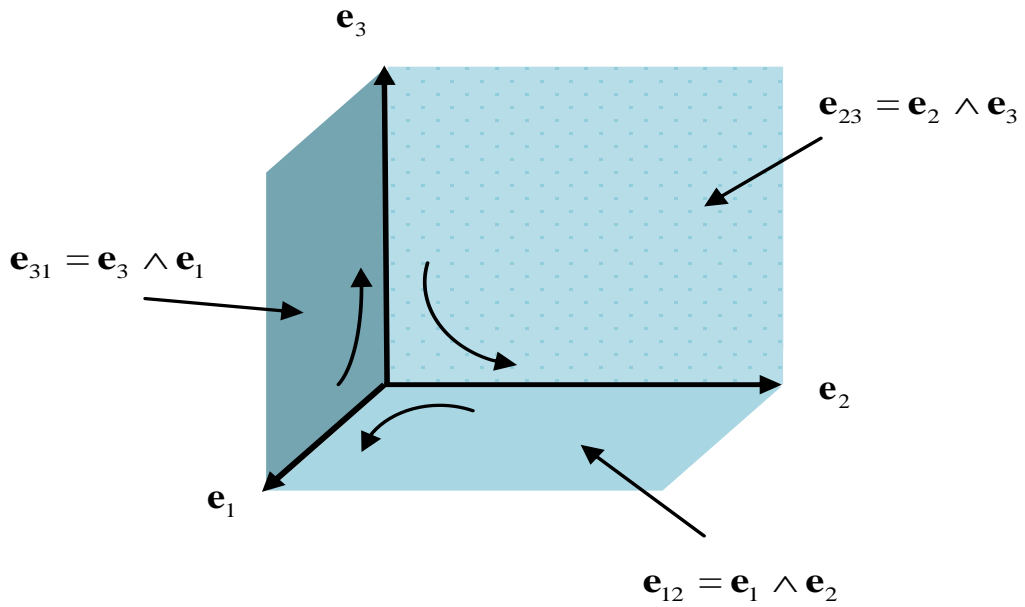


Figura 2.3: Representação do subespaço $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ dos bivectores de $\mathbb{C}\ell_3$

O subespaço $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ dos bivectores tem uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}\}$ pelo que a dimensão é 3, ou seja $\dim(\wedge^2 \mathbb{R}^3) = 3$.

O Produto geométrico apresenta duas propriedades importantes no subespaço:

$$\text{Invertibilidade} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \\ \mathbf{b}^{-1} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{a}\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{b}^{-1} \\ \mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\text{Dependência de uma métrica} \rightarrow \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \text{ para } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.20)$$

O produto exterior de três vectores origina um trivector que representa o volume orientado. Neste caso o trivector unitário é \mathbf{e}_{123} .

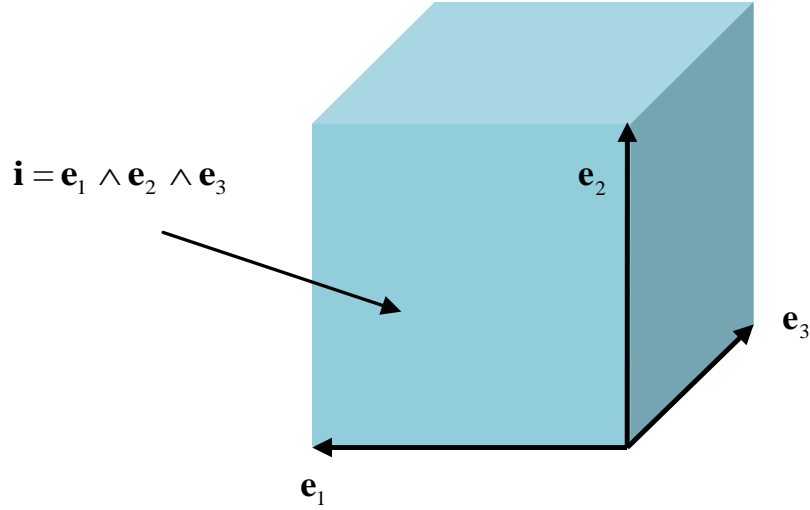


Figura 2.4: Representação do trivector unitário $\mathbf{i} = \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$.

Tal como no caso anterior do bivector, o trivector tem um quadrado negativo.

$$\text{Reverso de } \mathbf{e}_{123} \rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_{123} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{123}$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{e}_{123}^2 = \mathbf{e}_{123} \mathbf{e}_{123} = -\mathbf{e}_{123} \tilde{\mathbf{e}}_{123} = -(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1^2 \mathbf{e}_2^2 \mathbf{e}_3^2 = -1 \quad (2.21)$$

Um trivector é o produto exterior de três vectores designado por \mathbf{V} , que representa o volume orientado, correspondente ao volume do paralelepípedo resultante dos três vectores.

$$\text{Trivector ou pseudoescalar} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{123} = \beta \mathbf{e}_{123} = \beta \hat{\mathbf{V}} = \beta \mathbf{i} \in \wedge^3 \mathbb{R}^3 \\ \beta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

$$\therefore \mathbf{V}^2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^2 = (\beta \mathbf{i}^2) = -\beta^2 \quad (2.23)$$

Utilizando a propriedade associativa e antissimétrica, o produto exterior vem dado por:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad (2.24)$$

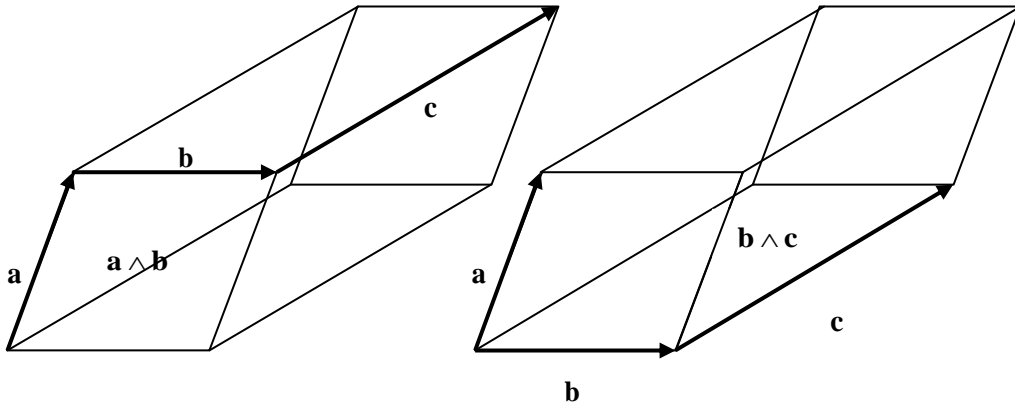


Figura 2.5: Representação do produto exterior de três vectores

Como nota, o trivector $\mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ é o dual do (pseudo) escalar da álgebra vectorial de Gibbs a que se dá o nome de triplo produto escalar (ou produto misto) $\beta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ tal que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

que, como se sabe, observa a permutação cíclica.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2.26)$$

2.2 Álgebra Geométrica do Plano

Com a caracterização do produto geométrico, que é de resto a definição chave em álgebra geométrica, está-se em condições de caracterizar a estrutura algébrica de $\mathbb{C}\ell_2$ definida no espaço bidimensional euclidiano \mathbb{R}^2 . O produto geométrico que anteriormente está definido corresponde ao produto bilinear $\mathbb{C}\ell_2 \times \mathbb{C}\ell_2 \rightarrow \mathbb{C}\ell_2$. A base desta álgebra é constituída pelos quatro elementos ($2^2 = 4$). Esta álgebra apresenta três subespaços: escalares, vectores e bivectores.

$$\begin{array}{lcl} \text{escalares} & \mathbb{R} & \\ \text{Subespaços de } \mathbb{C}\ell_2 \rightarrow & \text{vectores } \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{C}\ell_2 = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^2}_{\text{soma graduada}} \\ & \text{bivectores } \wedge^2 \mathbb{R}^3 & \end{array} \quad (2.27)$$

$$\text{Base de } \mathbb{C}\ell_2 \rightarrow \mathcal{B} = \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12}\} \quad (2.28)$$

O conjunto desses subespaços, formam uma álgebra de dimensão 4, como facilmente se verifica recorrendo ao triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \quad \dim(\mathbb{C}\ell_2) = 1 + 2 + 1 = 2^2 = 4 \quad (2.29)$$

Dada as considerações anteriores tem-se que o elemento genérico desta álgebra denominada multivector u que è dado em geral por:

$$u = \sum_{r=0}^2 \langle u \rangle_r = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 \in \mathbb{C}\ell_2 \quad (2.30)$$

Em que $\langle u \rangle_r$ representa a projecção do multivector u de grau r .

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_0 &= u_0 \\ \langle u \rangle_1 &= u_1 e_1 + u_2 e_2 \\ \langle u \rangle_2 &= u_{12} e_{12} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\therefore u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12} \in \mathbb{C}\ell_2 \quad (2.32)$$

A álgebra geométrica do plano obedece assim à seguinte tabela multiplicativa.


	e_1	e_2	e_{12}
e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

Tabela I: Tabela multiplicativa de $\mathbb{C}\ell_2$

2.3 Álgebra Geométrica do Espaço

Considera-se agora a estrutura algébrica de $\mathbb{C}\ell_3$ definida no espaço tridimensional euclidiano \mathbb{R}^3 . Esta álgebra apresenta quatro subespaços.

$$\begin{array}{rcl} \text{Subespaços da álgebra geométrica } \mathbb{C}\ell_3 \rightarrow & \begin{array}{l} \text{escalares} \quad \mathbb{R} \\ \text{vectores} \quad \mathbb{R}^3 \\ \text{bivectores} \quad \wedge^2 \mathbb{R}^3 \\ \text{trivectores} \quad \wedge^3 \mathbb{R}^3 \end{array} & (2.33) \end{array}$$

A álgebra $\mathbb{C}\ell_3$ é uma soma graduada $\mathbb{C}\ell_3 = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3}_{\text{soma graduada}}$

A base desta álgebra é constituída por oito elementos ($2^3 = 8$)

Base de $\mathbb{C}\ell_3 \rightarrow \mathcal{B} = \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{123}\}$

Uma representação esquemática da dimensão da álgebra $\mathbb{C}\ell_3$, revela uma estrutura simétrica, que forma o triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & \\ 1 & & 2 & & 1 & & \\ & & & & & & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array} \quad \dim(\mathbb{C}\ell_3) = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8 \quad (2.34)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{B} = \{1\} & \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} & \{\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}\} & \{\mathbf{e}_{123}\} & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ \text{escalares} & \text{vectores} & \text{bivectores} & \text{pseudoescalar} & & & \end{array} \quad (2.35)$$

O pseudoescalar é o nome que se dá ao multivector homogéneo da álgebra geométrica do espaço, cada pseudoescalar corresponde a um trivector.

O multivector é um elemento genérico u , da álgebra.

$$u = \sum_{r=0}^3 \langle u \rangle_r = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 \in \mathbb{C}\ell_3 \quad (2.36)$$

$$u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{F} + \mathbf{V} \in \mathbb{C}\ell_3 \quad (2.37)$$

Onde

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_0 &= \alpha \in \mathbb{R} \\ \langle u \rangle_1 &= \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \\ \langle u \rangle_2 &= \mathbf{F} \in \wedge^2 \mathbb{R}^3 \\ \langle u \rangle_3 &= \mathbf{V} \in \wedge^3 \mathbb{R}^3 \end{aligned} \Rightarrow u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{F} + \mathbf{V} \in \mathbb{C}\ell_3 \quad (2.38)$$

Representa-se por $\langle u \rangle_K$ a projecção de u em relação ao grau k , ou seja, a dimensão do subespaço $\wedge^K \mathbb{R}^3$. Assim, introduz o conceito de lâmina. Uma lâmina K da álgebra $\mathbb{C}\ell_3$ é um elemento u_K tal que $u_K = \langle u_K \rangle_K$, onde $\langle u_K \rangle_K$ é um elemento homogéneo de grau K e resulta do produto exterior de um (ou mais) vectores.

A álgebra geométrica de $\mathbb{C}\ell_3$ obedece a seguinte tabela multiplicativa.


	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{31}	e_{123}
e_1	1	e_{12}	$-e_{31}$	e_2	e_{123}	$-e_3$	e_{23}
e_2	$-e_{12}$	1	e_{23}	$-e_1$	e_3	e_{123}	e_{31}
e_3	e_{31}	$-e_{23}$	1	e_{123}	$-e_2$	e_1	e_{12}
e_{12}	$-e_2$	e_1	e_{123}	-1	$-e_{31}$	e_{23}	$-e_3$
e_{23}	e_{123}	$-e_3$	e_2	e_{31}	-1	$-e_{12}$	$-e_1$
e_{31}	e_3	e_{123}	$-e_1$	$-e_{23}$	e_{12}	-1	$-e_2$
e_{123}	e_{23}	e_{31}	e_{12}	$-e_3$	$-e_1$	$-e_2$	-1

Tabela II: Tabela multiplicativa de $\mathbb{C}\ell_3$

Existem vários conceitos que importam referir no âmbito da álgebra geométrica $\mathbb{C}\ell_3$, deste modo, conceitos como a dualidade, involução de grau, reversão e conjugação de Clifford.

Dos conceitos mencionados, excepto a dualidade, são todos involuções.

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \rightarrow \text{Involução de grau} \\
\text{Involuções em } \mathbb{C}\ell_3 &\rightarrow \tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \rightarrow \text{Reversão} \\
\bar{u} &= \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 \rightarrow \text{Conjugação de Clifford}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Dado um multivector genérico $u \in \mathbb{C}\ell_3$ define-se o correspondente dual de Clifford como sendo o novo multivector $v = u\mathbf{e}_{123} \in \mathbb{C}\ell_3$, tal que:

$$u = \alpha + \mathbf{a} + \beta\mathbf{e}_{123} + \beta\mathbf{e}_{123} \mapsto v = u\mathbf{e}_{123} = -\beta - \mathbf{b} + \alpha\mathbf{e}_{123} + \alpha\mathbf{e}_{123} \tag{2.40}$$

Assim,

- (i) O dual de um escalar é um trivector (também designado por pseudoescalar)
- (ii) O dual de um vector é um bivector.

A introdução do conceito de dualidade permite estabelecer a forma como o produto externo de Gibbs se relaciona com a álgebra geométrica de $\mathbb{C}\ell_3$. Apenas em \mathbb{R}^3 é que o dual de um vector (resp., bivector) é um bivector (resp., vector): só em \mathbb{R}^3 é que é possível definir o produto externo ao contrário do produto exterior de Grassmann.

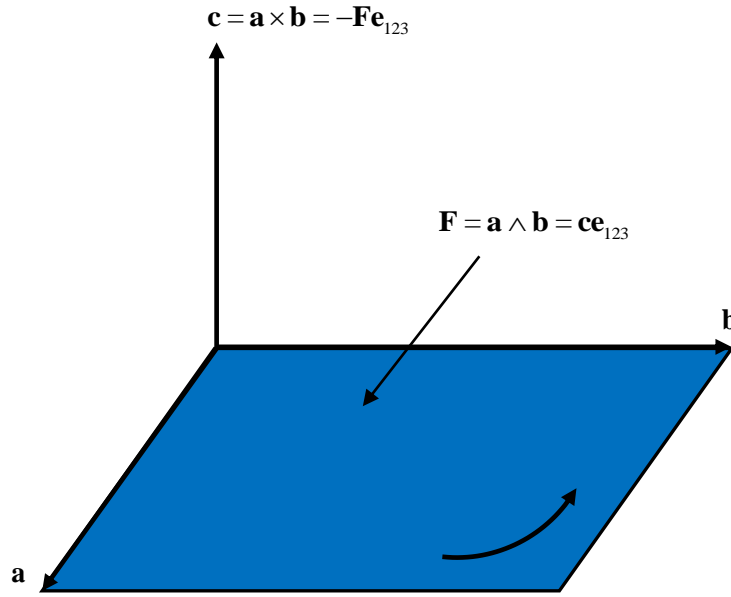


Figura 2.6: Dualidade entre o produto externo de Gibbs e o produto exterior de Grassmann

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{123} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \quad (2.41)$$

$$\therefore \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \quad (2.42)$$

A álgebra geométrica $\mathbb{C}\ell_3$, compreende dois subespaços importantes:

$$\mathbb{C}\ell_3 = \mathbb{C}\ell_3^+ \oplus \mathbb{C}\ell_3^- \quad (2.43)$$

O subespaço par $\mathbb{C}\ell_3^+$, cujos elementos resultam do produto geométrico de um número par de vectores, e o subespaço ímpar $\mathbb{C}\ell_3^-$, cujos elementos resultam do produto geométrico de número ímpar de vectores. Um conceito também bastante importante é o centro da álgebra representado

por $\text{Cen}(\mathbb{C}\ell_3)$, definido como o subespaço constituídos pelos elementos de $\mathbb{C}\ell_3$ que comutam com quaisquer elementos de $\mathbb{C}\ell_3$.

$$\text{Cen}(\mathbb{C}\ell_3) = \mathbb{R} \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3 \quad (2.44)$$

$$\begin{cases} \mathbb{C}\ell_3^+ = \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{C}\ell_3^- = \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2.45)$$

Dos dois subespaços apenas o subespaço par e o centro da álgebra constituem subálgebras, dado que o subespaço não é fechado em relação ao produto geométrico.

O corpo \mathbb{C} (dos complexos) e o anel de divisão \mathbb{H} (dos quaterniões de Hamilton) são isomórficas a estas subálgebras de $\mathbb{C}\ell_3$.

$$\begin{cases} \mathbb{C} \simeq \text{Cen}(\mathbb{C}\ell_3) = \mathbb{R} \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}\ell_3^+ = \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2.46)$$

2.4 Rotores e Contracções

Os rotores são operadores da álgebra geométrica responsáveis da geração de rotações. Estas rotações podem ser rotações no plano (no caso de $\mathbb{C}\ell_2$), rotações especiais (no caso de $\mathbb{C}\ell_3$) ou de rotações espaciais e de transformações de Lorenz activas (no caso de $\mathbb{C}\ell_{1,3}$).

2.4.1 Reflexões e rotações no plano

A álgebra geométrica permite tratar de uma forma simples as reflexões e as rotações no plano \mathbb{R}^2 . Começa-se por determinar a reflexão de um vector $\mathbf{a} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}'$ em que os vectores \mathbf{r}, \mathbf{a} e \mathbf{r}' pertencem ao mesmo plano.

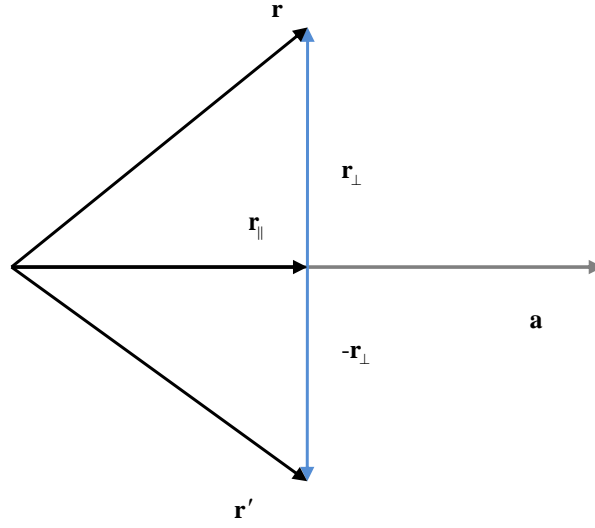


Figura 2.7: Reflexão do vector \mathbf{r} em relação ao vector \mathbf{a}

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r}_\parallel - \mathbf{r}_\perp \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} \mathbf{a} \mathbf{a}^{-1} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{r} \mathbf{a} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) \mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1} \quad (2.50)$$

Está-se então em condições de definir a reflexão do vector \mathbf{r} em relação ao vector \mathbf{a} :

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1} \quad (2.51)$$

A Figura 2.8 mostra uma rotação de vector \mathbf{r} para o vector \mathbf{r}'' , pode ser analisada como a combinação de duas reflexões sucessivas: primeiro em relação ao vector \mathbf{a} , $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{a}^{-1}$, depois em relação ao vector \mathbf{b} , $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}'' = \mathbf{b}\mathbf{r}\mathbf{b}^{-1}$.

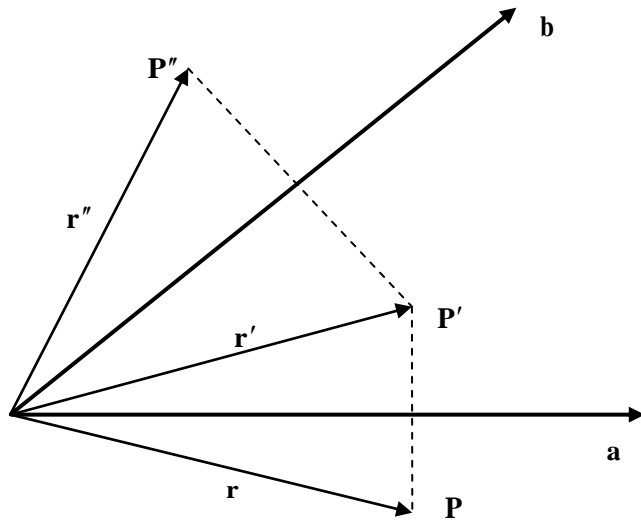


Figura 2.8: Rotação de um vector \mathbf{r} para o vector \mathbf{r}''

2.4.2 Reflexões e Rotações no Espaço

Na figura abaixo é mostrado a reflexão de um vector em relação a um plano bivector.

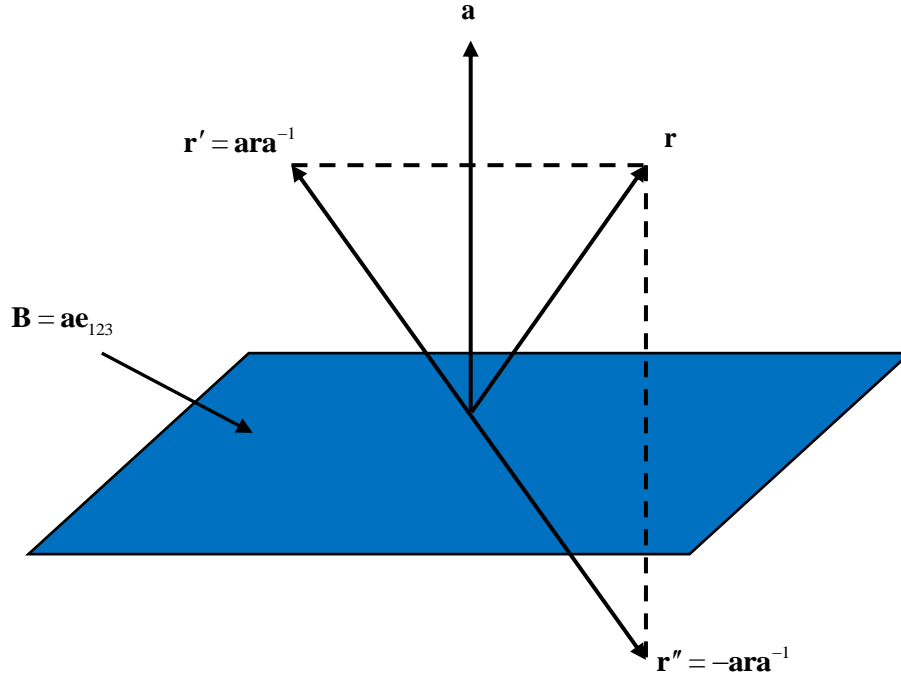


Figura 2.9: Reflexão do vector \mathbf{r} em relação ao eixo (vector) e a um plano (bivector)

Analisando a reflexão do vector \mathbf{r} em relação ao eixo caracterizado pelo vector \mathbf{a} , formalmente tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{r}_{\perp} \\
 \mathbf{r}_{\parallel} &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a}^{-1}, \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{r} \mathbf{a} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{a} \mathbf{a}^{-1} \\
 \therefore \mathbf{r}' &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1} \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Por outro lado a reflexão do mesmo vector \mathbf{r} em relação ao plano caracterizado pelo bivector $\mathbf{B} = \mathbf{a} \mathbf{e}_{123}$, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &\mapsto \mathbf{r}'' = -\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} \\
 \mathbf{r}'' &= -\mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1} = -(\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) \mathbf{r} (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123})^{-1} \\
 &= -(\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) \mathbf{r} (\mathbf{e}_{123}^{-1} \mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) \mathbf{r} (\mathbf{e}_{123} \mathbf{B}^{-1})
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\therefore \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}'' = -\mathbf{B} \mathbf{r} \mathbf{B}^{-1}$$

O Rotor \mathbf{R} é definido como sendo um multivector formado pelo produto geométrico de dois vectores unitários $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$, tais que $\mathbf{n}^2 \mathbf{m}^2 = 1$, e como tal pode ser escrito como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{n}\mathbf{m} \quad (2.54)$$

Desta definição resulta que:

$$\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{n}\mathbf{m})(\mathbf{n}\mathbf{m}) = \mathbf{n}^2 \mathbf{m}^2 \Rightarrow \mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1 \quad (2.55)$$

Da definição 2.54 resulta ainda que o multivector $\mathbf{R} \in \mathbb{C}\ell_3$ é tal que $\mathbf{R} = \langle \mathbf{R} \rangle_0 + \langle \mathbf{R} \rangle_2$ onde,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R} \rangle_0 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \cos \theta \\ \langle \mathbf{R} \rangle_2 &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{m} = \hat{\mathbf{B}} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.56)$$

Em, (2.56), $\hat{\mathbf{B}} \in \wedge^2 \mathbb{R}^3$ é um bivector unitário, i.e., $\hat{\mathbf{B}}^2 = -1$. Posto isto infere-se que a formula de Euler em $\mathbb{C}\ell_3$ é a seguinte:

$$\exp(\theta \hat{\mathbf{B}}) = \cos(\theta) + \hat{\mathbf{B}} \sin(\theta) \quad (2.57)$$

Defina-se então o rotor em $\mathbb{C}\ell_3$

$$\begin{aligned} &= \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{\theta^{2K}}{(2K)!} + \hat{\mathbf{B}} \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{\theta^{2K+1}}{(2K+1)!} \\ \mathbf{R} &= \exp(\theta \hat{\mathbf{B}}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Atendendo a que se tem:

$$\hat{\mathbf{B}} = -1 \Rightarrow \hat{\mathbf{B}}^{2K} = (-1)^K \Rightarrow \hat{\mathbf{B}}^{2K+1} = (-1)^K \hat{\mathbf{B}} \quad (2.59)$$

A fórmula em $\mathbb{C}\ell_3$ pode ser demonstrada da seguinte forma:

$$\exp(\theta \hat{\mathbf{B}}) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(\theta \hat{\mathbf{B}})^K}{K!} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(\theta \hat{\mathbf{B}})^{2K}}{(2K)!} + \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(\theta \hat{\mathbf{B}})^{2K+1}}{(2K+1)!} \quad (2.60)$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{\theta^{2K}}{(2K)!} + \hat{\mathbf{B}} \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{\theta^{2K+1}}{(2K+1)!} \quad (2.61)$$

$$= \cos(\theta) + \hat{\mathbf{B}} \sin(\theta) \quad (2.62)$$

A acção geométrica de um rotor sobre um vector é apresentada na Figura 2.10, mas para isso tem-se que:

$$\frac{\theta}{2} = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{n}\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{m} \quad (2.63)$$

$$= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \hat{\mathbf{B}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.64)$$

$$\therefore \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}' = \mathbf{R}\mathbf{a}\tilde{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{R} = \exp\left(-\hat{\mathbf{B}} \frac{\theta}{2}\right) \quad (2.65)$$

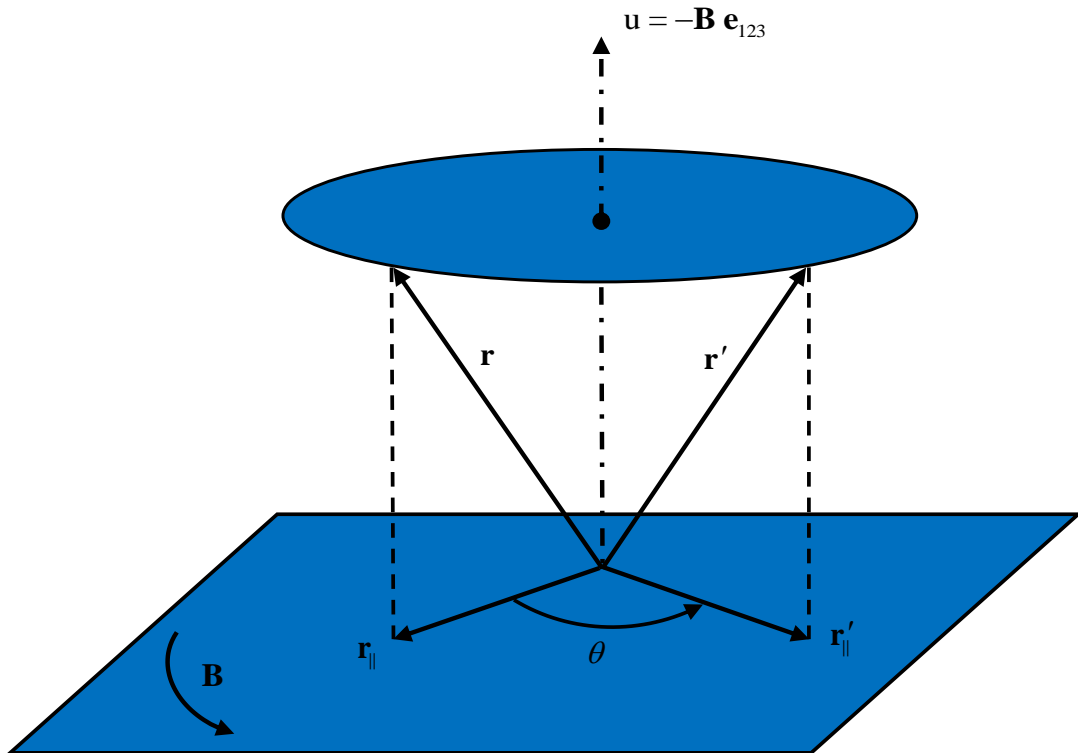


Figura 2.10: Rotação do vector $\mathbf{r} \in \mathbb{C}\ell_3$ de um ângulo θ no plano do bivector unitário $\hat{\mathbf{B}}$

A expressão (2.65) corresponde a uma rotação do vector $\mathbf{r} \in \mathbb{C}\ell_3$ de um ângulo θ no plano do bivector unitário $\hat{\mathbf{B}}$. O sentido da rotação é determinado pelo vector unitário $\hat{\mathbf{B}}$. Deve-se ainda verificar-se que:

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \mathbf{m}^2 = \mathbf{n}^2 = 1 \quad (2.66)$$

2.4.3 Contracções

A contracção é uma operação muito importante na álgebra geométrica, surge no produto geométrico de um vector por um bivector (contracção a esquerda) ou de um bivector por um vector (contracção a direita). Começando pela contracção a esquerda, analisa-se o produto geométrico de um vector \mathbf{a} por um bivector $\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}\mathbf{B} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \in \mathbb{C}\ell_3 \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}) &= \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{bc} - \mathbf{cb}) = \frac{1}{2}(\mathbf{ab})\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{ac})\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{2}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{ba}]\mathbf{c} - \frac{1}{2}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{ca}]\mathbf{b} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{bac} - \mathbf{cab}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{bac} - \mathbf{cab}) &= \frac{1}{2}\mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \frac{1}{2}\mathbf{c}(\mathbf{ab}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{b}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{ca}] - \frac{1}{2}\mathbf{c}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{ba}] \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{bca} - \mathbf{cba}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{bc} - \mathbf{cb})\mathbf{a} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Substituindo a ultima expressão das equações (2.69) na equação (2.68) vem que:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}]$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \quad (2.70)$$

$$\Rightarrow \mathbf{aB} = \mathbf{Ba} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$$

Define-se então a contracção a esquerda como:

$$\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{aB} - \mathbf{Ba}) \quad (2.71)$$

Da definição anteriormente resulta a regra fundamental da contracção a esquerda

$$\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \quad (2.72)$$

De maneira análoga a contracção a esquerda define a contracção à direita de um bivector

$\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ por um vector \mathbf{a}

$$\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{Ba} - \mathbf{aB}) \quad (2.73)$$

Existe uma anti-simetria entre a contracção a esquerda e a contracção à direita.

$$\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} = -\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{a} \quad (2.74)$$

Representa-se abaixo alguns casos particulares de contracções:

$$\left| \begin{array}{l} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \\ \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \end{array} \right. \quad (2.75)$$

Pode chegar-se a outras conclusões relativas ao produto geométrico de vector por um bivector como soma da parte impar com a parte par.

$$\mathbf{u} = \mathbf{aB} = \frac{1}{2}(\mathbf{aB} - \mathbf{Ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{aB} + \mathbf{Ba}) \quad (2.76)$$

O produto geométrico de um vector \mathbf{a} por um bivector \mathbf{B} é, em geral, a soma (graduada) de um vector com um trivector. Para melhor compreender esta afirmação considera-se a decomposição do vector \mathbf{a} na sua componente paralela e perpendicular, em que \mathbf{a}_{\parallel} se encontra no plano definido por \mathbf{B} .

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{a}_{\parallel} \quad (2.77)$$

Considerando um vector \mathbf{b} perpendicular a \mathbf{a}_{\parallel} , $(\mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{b}) = 0$ localizado em \mathbf{B} , tal que $\mathbf{B} = \mathbf{a}_{\parallel} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{b}$, vem $\mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{B} = \mathbf{a}_{\parallel}^2 \mathbf{b}$ que é um vector.

Por outro lado $\mathbf{a}_{\perp} \mathbf{B} = \mathbf{a}_{\perp} (\mathbf{a}_{\parallel} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}_{\perp} \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{b}$ é o produto de três vectores ortogonais entre si, ou seja, é um trivector. Obtendo-se consequentemente:

$$\mathbf{aB} = (\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) \mathbf{B} = \mathbf{a}_{\parallel}^2 \mathbf{b} + \mathbf{a}_{\perp} \wedge \mathbf{a}_{\parallel} \wedge \mathbf{b} \quad (2.78)$$

Conclui-se deste modo que o produto geométrico de um vector por um bivector origina a soma graduada de um vector com um trivector.

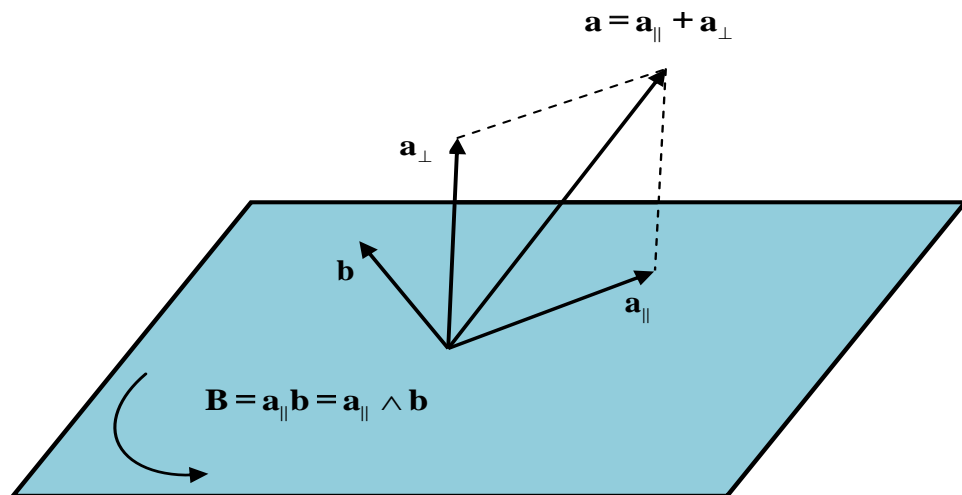


Figura 2.11: Representação do produto geométrico um vector \mathbf{a} por um bivector \mathbf{B}

Simetricamente se define o produto geométrico de um bivector por um vector, ou seja **Ba**.

Posto isto, e recapitulando tem-se o seguinte:

$$\mathbf{u} = \mathbf{aB} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{aB} - \mathbf{Ba})}_{\text{vector}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{aB} + \mathbf{Ba})}_{\text{trivector}} \quad (2.79)$$

Pelo que, podemos concluir

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{aB} - \mathbf{Ba}) = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{aB} + \mathbf{Ba}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} \in \wedge^3 \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2.80)$$

Nota-se que,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = -\mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = +(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{a} \quad (2.81)$$

Simetria do produto exterior de um
vector com um bivector

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{a}}$$

Produto geométrico de um vector por um
bivector

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathbf{aB} &= \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{Ba} &= \mathbf{B} \lrcorner \mathbf{a} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{a} \end{aligned}}$$

Para interpretar geometricamente a operação de contracção considera-se

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{BB}^{-1}) = (\mathbf{aB})\mathbf{B}^{-1} = \underbrace{(\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}}_{\mathbf{a}_{\parallel}} + \underbrace{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}}_{\mathbf{a}_{\perp}} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\parallel} &= (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} = -(\mathbf{a} \lrcorner \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}} \\ \mathbf{a}_{\perp} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} = -(\mathbf{a} \wedge \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{B} = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} \\ \hat{\mathbf{a}}_{\perp} \mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{a}_{\parallel} \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{a} \lrcorner \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{a}}_{\perp} \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{a} \wedge \hat{\mathbf{B}} \end{cases} \quad (2.83)$$

Na figura abaixo está representado um vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, decomposto em duas componentes:

Uma componente paralela \mathbf{a}_{\parallel} contida no bivector \mathbf{B} e uma componente perpendicular \mathbf{a}_{\perp} contida nesse mesmo bivector.

O vector $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}_{\parallel}$ é a contracção a esquerda $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} = \mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{B}$, que é diametralmente oposta a contracção à direita $\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{a} = -\mathbf{a}_{\parallel} \mathbf{B}$.

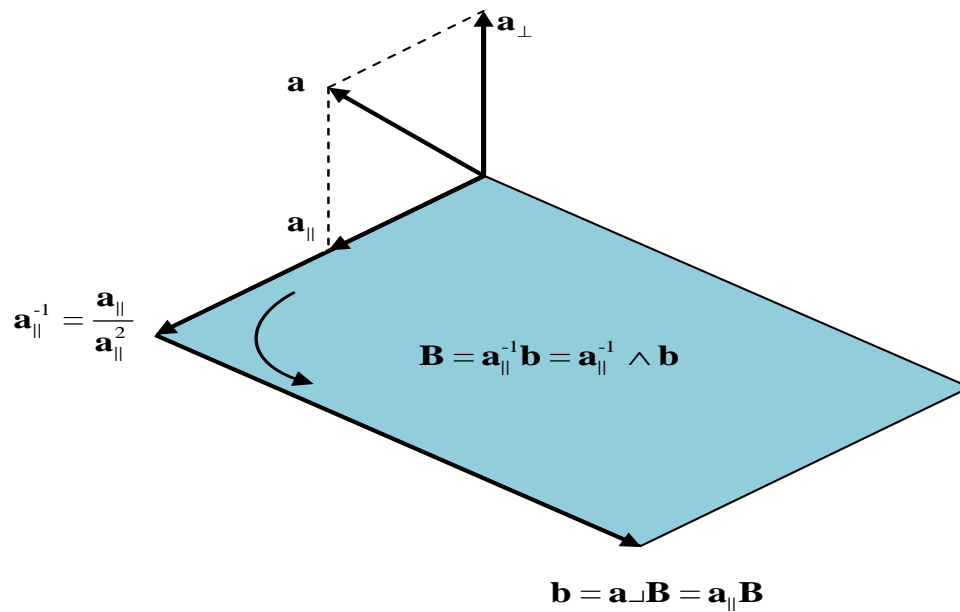


Figura 2.12: Interpretação geométrica da contracção $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B}$.

Nota-se que quando $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\perp}$, o vector \mathbf{a} é perpendicular a \mathbf{B} , e tem-se $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B} = 0$, e quando $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel}$, o vector \mathbf{a} encontra-se no plano definido por \mathbf{B} , e tem-se $\mathbf{a} \wedge \mathbf{B} = 0$.

2.5 Conclusões

Neste capítulo abordam-se as bases da álgebra geométrica, particularizadas para espaços bidimensionais e tridimensionais euclidianos. Através desta álgebra definiu-se um conceito importante, o produto geométrico entre vectores, com base no produto interno e exterior. Este produto resulta da soma entre o produto interno e o produto exterior, sendo não comutativo no caso geral e também apresenta propriedades de associatividade e invertibilidade. Devido a sua propriedade de não comutatividade surge um novo objecto geométrico, o bivector (representada pela área orientada).

Quanto ao produto exterior de Grassmann conclui-se que é diferente do produto externo de Gibbs e apenas pode ser relacionado com ele em \mathbb{R}^3 . Este produto goza da propriedade associativa, anti-simétrica e independente de qualquer métrica, ao contrário do produto de externo de Gibbs que é usual no espaço tridimensional e não é associativa.

Por fim, estudam-se dois operadores importantes da álgebra geométrica: os rotores e as contracções. Os rotores desempenham um papel muito útil enquanto geradores de rotações, e as contracções são úteis para definir o produto geométrico de vectores por bivectores.

Capítulo 3

Teoria de Funções Lineares

Neste capítulo são introduzidos vários conceitos importantes para aplicação da álgebra geométrica em meios anisotrópicos, como por exemplo o corpo, funções lineares, espaços lineares. Faz-se uma análise desses conceitos e caracteriza-se a respectiva estrutura algébrica.

3.1 Corpo

Os números \mathbf{a}, \mathbf{b} e \mathbf{c} são elementos de um conjunto designado por corpo. Num corpo \mathbb{F} os números $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ são definidos pelas seguintes axiomas de adição e multiplicação, para $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{F}$.

- Axioma de adição

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} & \text{comutatividade} \\
 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) & \text{associatividade} \\
 \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a} & \text{elemento neutro } 0 \\
 \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0 & \text{oposto de } -\mathbf{a}
 \end{array} \tag{3.1}$$

- Axioma da multiplicação

$$\begin{array}{ll}
 \begin{cases} (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \end{cases} & \text{distributividade} \\
 (\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}) & \text{associatividade} \\
 1\mathbf{a} = \mathbf{a} & \text{elemento neutro } 1 \\
 \mathbf{aa}^{-1} = 1 & \text{inverso } \mathbf{a}^{-1} \text{ de } \mathbf{a} \neq 0 \\
 \mathbf{ab} = \mathbf{ba} & \text{comutatividade}
 \end{array} \tag{3.2}$$

Os conjuntos \mathbb{N} e \mathbb{Z} não são corpos, já os conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} .

3.2 Espaços lineares

Um espaço linear (ou vectorial) \mathbf{V} é definido sobre um corpo \mathbb{R} dos números reais. Aos elementos deste espaço linear \mathbf{V} dá-se o nome de vectores. Num espaço linear os vectores podem ser somados, no entanto, não se pode definir formalmente um produto entre vectores,

apenas se podem multiplicar por vectores números reais (no caso em questão) aos quais também se dá o nome de escalares neste contexto.

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\mapsto \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbf{V} \text{ para } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V} \\(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\mapsto \lambda \mathbf{a} \in \mathbf{V} \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}\end{aligned}\tag{3.3}$$

- Axiomas da soma entre vectores $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{V})$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} && \text{comutatividade} \\(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) && \text{associatividade} \\ \mathbf{a} + \mathbf{0} &= \mathbf{a} && \text{vector nulo} \\ \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.4}$$

- Axiomas da multiplicação por escalares $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V})$

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{aligned} \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \\ (\lambda + \mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} \end{aligned} \right. && \text{distributividade} \\ (\lambda\mu)\mathbf{a} &= (\mu\mathbf{a}) && \text{associatividade} \\ 1\mathbf{a} &= \mathbf{a} && \text{elemento neutro}\end{aligned}\tag{3.5}$$

Estes dois conjuntos de axiomas estabelecem uma estrutura linear em \mathbf{V} . Um exemplo particular de espaço linear é o \mathbb{R}^3 definido sob o corpo \mathbb{R} .

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}\tag{3.6}$$

3.3 Funções lineares

Um subconjunto U de um espaço linear \mathbf{V} diz-se um subespaço linear de \mathbf{V} desde que seja fechado em relação as duas operações seguintes.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &\in U \text{ para } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \\ \lambda \mathbf{a} &\in U \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in U \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por exemplo, \mathbb{R}^2 é um subespaço de \mathbb{R}^3 .

Uma aplicação $L: U \rightarrow V$ entre dois espaços lineares U e V diz-se uma função linear desde que,

$$L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b}), \quad L(\lambda \mathbf{a}) = \lambda L(\mathbf{a}) \quad (3.8)$$

Uma função linear $V \rightarrow V$ diz-se uma transformação linear ou endomorfismo.

Uma função $U \rightarrow V$ invertível diz-se um isomorfismo linear e escreve-se então $U \simeq V$.

Um vector $\mathbf{b} \in V$ diz-se uma combinação linear dos vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ se for possível escrever

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

Um conjunto de vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ diz-se linearmente independente se nenhum deles puder ser escrito como combinação linear dos restantes. Ou seja,

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0 \quad (3.10)$$

Numa combinação linear $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$ em que o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ é linearmente independente, os números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são únicos e designam-se por coordenadas de vector \mathbf{b} . As combinações lineares de $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset V$ formam um subespaço de V conhecido por subespaço gerado por $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$. Um conjunto linear independente $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset V$ que gera V diz-se uma base de V . Todas as bases de V têm o mesmo número de elementos que se designa por dimensão de V .

3.3.1 Determinante de uma função linear

Em álgebra geométrica define-se determinante de uma função linear de forma simples e completamente independente da linguagem matricial. No caso específico de $\mathbb{C}\ell_3$ define-se determinante como:

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{V} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{V}) = \det(\mathbf{L}) \mathbf{V} \quad (3.11)$$

Para o caso biaxial o determinante de uma função dieléctrica, $\varepsilon: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tem-se que:

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon(\mathbf{e}_{123}) = \varepsilon(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \varepsilon(\mathbf{e}_1) \wedge \varepsilon(\mathbf{e}_2) \wedge \varepsilon(\mathbf{e}_3) \\ \quad = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathbf{e}_{123} \end{array} \right. \Rightarrow \det(\varepsilon) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad (3.12)$$

Onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3 são os três valores próprios da função dieléctrica segundo os eixos dieléctricos principais (os vectores próprios) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e \mathbf{e}_3 .

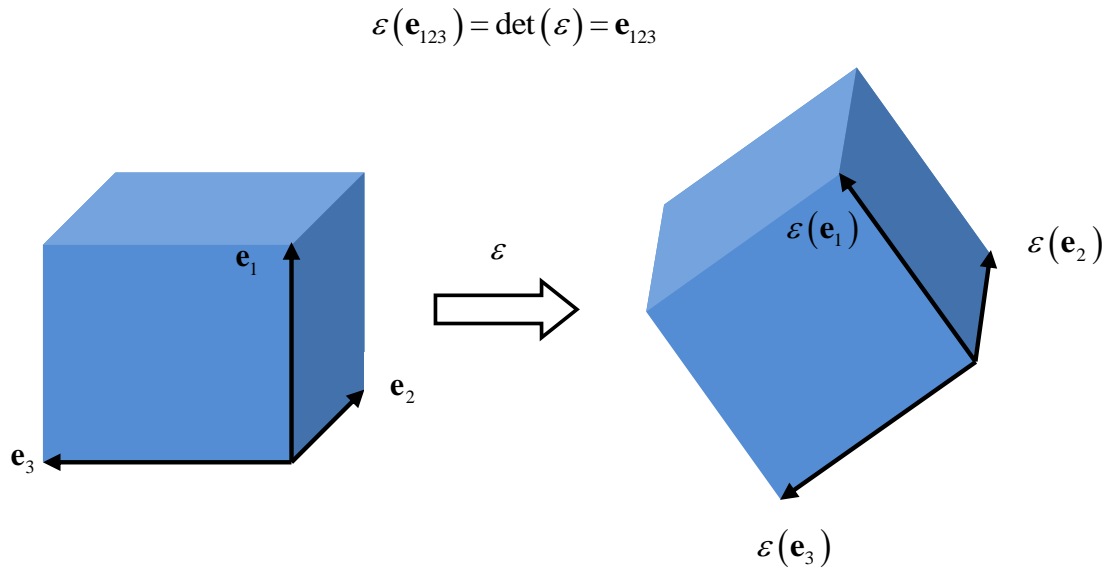


Figura 3.1: Aplicação de uma função linear ε à base de vectores ortonormada $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$

3.3.2 Adjunta de uma função linear

Sendo $F: U \rightarrow V$ uma função linear, a sua adjunta é a aplicação $\bar{F}: V \rightarrow U$ tal que:

$$F(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \bar{F}(\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a} \in U, \quad \forall \mathbf{b} \in V \quad (3.13)$$

Esta definição também se aplica aos bivectores e trivectores além dos vectores.

Uma propriedade interessante envolvendo o determinante de funções lineares, é o determinante de uma função linear ser igual ao da sua adjunta. Deste modo tem-se,

$$\mathbf{V} \in \wedge^3 \mathbb{R}^3, \det F = F = \mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\bar{F}\mathbf{V}^{-1} = \det \bar{F} \quad (3.14)$$

A seguinte propriedade também se verifica,

$$\mathbf{B} \in \wedge^2 \mathbb{R}^3, \mathbf{V} \in \wedge^3 \mathbb{R}^3, \mathbf{FVB} = [\mathbf{V}\bar{F}\mathbf{B}] \quad (3.15)$$

3.3.3 Funções simétricas e anti-simétricas

Uma função linear F é simétrica quando é igual a sua adjunta e anti-simétrica quando a sua adjunta for igual a $-F$.

Uma transformação linear ou endomorfismo $F: U \rightarrow U$ pode ser decomposta na soma de uma função simétrica L com uma função anti-simétrica M :

$$\begin{cases} L(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot L(\mathbf{b}) \\ M(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot M(\mathbf{b}) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{[L(\mathbf{a}) + M(\mathbf{a})]}_{F(\mathbf{a})} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \underbrace{[L(\mathbf{b}) - M(\mathbf{b})]}_{\bar{F}(\mathbf{b})} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \begin{cases} F(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}) + M(\mathbf{a}) \\ \bar{F}(\mathbf{a}) = L(\mathbf{a}) - M(\mathbf{a}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}[F(\mathbf{a}) + \bar{F}(\mathbf{a})] \rightarrow \text{simétrica} \\ M(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}[F(\mathbf{a}) - \bar{F}(\mathbf{a})] \rightarrow \text{anti-simétrica} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3.4 Inversa de uma função linear

Defina-se a inversa de uma função linear L , não nula como,

$$(L \circ L^{-1})(\mathbf{a}) = (L^{-1} \circ L)(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \quad (3.18)$$

Introduzindo um bivector \mathbf{B} e um trivector \mathbf{V} , em que $\mathbf{B} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{a}$, tem-se,

$$\det(L)\mathbf{a} = \det(L)\mathbf{V}\mathbf{B} = L(\mathbf{V})\mathbf{B} = L[\mathbf{V}\bar{L}(\mathbf{B})] = L[\mathbf{V}\bar{L}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{a})] \quad (3.19)$$

Onde se conclui que,

$$L^{-1}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\det(L)} \mathbf{V}\bar{L}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{a}) \quad (3.20)$$

Sendo \mathbf{V} um trivector da forma $\mathbf{V} = \beta \mathbf{e}_{123}$ é possível a função auxiliar L^\dagger tal que,

$$L^\dagger(\mathbf{a}) = \det(L)L^{-1}(\mathbf{a}) \quad (3.21)$$

E que representa uma função escalonada da inversa.

$$\mathbf{e}_{123}^{-1} = \frac{\mathbf{e}_{123}}{\mathbf{e}_{123}^2} = -\mathbf{e}_{123} \Rightarrow L^\dagger(\mathbf{a}) = -\mathbf{e}_{123}\bar{L}(\mathbf{a}\mathbf{e}_{123}) \quad (3.22)$$

3.3.5 Álgebra e estruturas quadráticas

Uma função $B: U \times U \rightarrow V$ diz-se bilinear $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \odot \mathbf{b} \in V$ desde que seja uma função linear relação a dois argumentos, i.e., desde que

$$\begin{cases} B(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = \lambda_1 B(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + \lambda_2 B(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) \\ B(\mathbf{a}, \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2) = \mu_1 B(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + \mu_2 B(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2) \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
& \therefore (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \odot (\mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2) \\
& = \lambda_1 \mu_1 (\mathbf{a}_1 \odot \mathbf{b}_1) + \lambda_1 \mu_2 (\mathbf{a}_1 \odot \mathbf{b}_2) + \lambda_2 \mu_1 (\mathbf{a}_2 \odot \mathbf{b}_1) + \lambda_2 \mu_2 (\mathbf{a}_2 \odot \mathbf{b}_2)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Por definição uma álgebra definida sobre um corpo \mathbb{F} é um espaço linear A sobre o corpo \mathbb{F} onde foi introduzida uma função bilinear $B: A \times A \rightarrow A: (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \odot \mathbf{b}$.

Os conceitos de distância e de ângulo são estranhos ao conceito de espaço linear. Não tem qualquer significado dizer que duas linhas no espaço linear \mathbb{R}^2 são ortogonais ou que os vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ são unitários. A estrutura linear permite comparar comprimentos de vectores paralelos, não permite comparar comprimentos de vectores não paralelos.

A estrutura quadrática no espaço linear \mathbb{R}^n implica a existência de uma álgebra que permite o cálculo com objectos geométricos. A estrutura quadrática está associada ao conceito de métrica que resulta da definição de um produto interno.

Defina-se o produto interno $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ no espaço linear V , com $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{array} \right. \quad \text{linear no primeiro factor} \\
& \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{simétrico} \\
& \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 \text{ para } \mathbf{a} \neq 0 \quad \text{definido positivo}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Consideremos, como exemplo, o espaço \mathbb{R}^3 com uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$ onde se define o produto interno habitual entre os vectores $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{em coordenadas} \\
& \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad \text{geometricamente}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Em que θ , com $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, é o ângulo entre \mathbf{a}, \mathbf{b} . Da definição em coordenadas vem

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \tag{3.27}$$

3.4 Conclusão

Neste capítulo pretendia-se apresentar vários conceitos para aplicação da álgebra geométrica em meios anisotrópicos, fornecendo ferramentas importantes para melhor compreender as bases da álgebra geométrica, assim como perceber que existem vantagens em aplicar estas ferramentas matemáticas ao estudo do electromagnetismo. Por fim caracteriza-se a respectiva estrutura algébrica.

Capítulo 4

Meios Anisotrópicos

Uma ferramenta actualmente utilizada para introduzir a anisotropia no âmbito de electromagnetismo é através do cálculo tensorial (ou diádico). Para se caracterizar um dieléctrico é necessário recorrer a um sistema de coordenadas utilizando matrizes, para obter por exemplo, o elipsóide de índices, em inglês *index-ellipsoid*. Neste capítulo é feita uma abordagem à anisotropia utilizando a álgebra geométrica em $\mathbb{C}\ell_3$, dando assim especial enfoque a utilização de um sistema de coordenadas livre para analisar a propagação das ondas electromagnéticas em meios anisotrópicos.

4.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell, assim designadas em honra de James Clerk Maxwell, descrevem o comportamento dos campos eléctricos e magnético, bem como suas interações com a matéria. Antes de as escrever é necessário ter em conta algumas considerações matemáticas que facilitam a sua escrita. Começa-se por definir o operador ∇ . Este operador está presente em todas as equações de Maxwell, mas possui uma acção específica sobre cada uma delas. O operador ∇ é caracterizado da seguinte forma:

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.1)$$

E ainda duas operações matemáticas o rotacional e a divergência, cuja as mesma se usam o operador nabla, e quando aplicadas sobre um dado vector $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3$ são escritas da seguinte forma:

$$\text{Rotacional} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

$$\text{Divergência} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (4.3)$$

É importante recordar que as equações de Maxwell contêm vectores (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , de grandeza intensiva (descrevem a intensidade do campo electromagnético), e os vectores (\mathbf{D}, \mathbf{H}) de grandeza extensiva (descrevem a intensidade de excitação de um determinado meio material).

De seguida escrevem-se as equações de Maxwell na linguagem vectorial comum no espaço linear \mathbb{R}^3 usando o produto externo de Gibbs.

$$\begin{aligned}
\text{Conservação do fluxo magnético} &\rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\rightarrow \text{Equação de Maxwell-Faraday} \\ \nabla \times \mathbf{B} = 0 &\rightarrow \text{Lei de Gauss magnética} \end{cases} \\
\text{Conservação de carga-corrente} &\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho &\rightarrow \text{Lei de Gauss} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &\rightarrow \text{Equação de Maxwell-Ampère} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Em anexo são apresentadas algumas relações envolvendo o operador nabla ∇ e o campo vectorial \mathbf{a} dado por $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3 \text{ em } \mathbb{C}\ell_3$.

Para se escrever as equações de Maxwell no âmbito da álgebra geométrica $\mathbb{C}\ell_3$ é importante que se conheça algumas grandezas:

$$\begin{cases} \text{intensidade do campo eléctrico} &\rightarrow \mathbf{E} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{intensidade do campo magnético} &\rightarrow \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} \text{Polarização} &\rightarrow \mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{Magnetização} &\rightarrow \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \text{densidade total da carga eléctrica} &\rightarrow \varrho_t = \varrho + \varrho_p \in \mathbb{R}^3 \\ \text{densidade total da corrente} &\rightarrow \mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} \text{excitação eléctrica} &\rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \text{excitação magnética} &\rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\text{velocidade da luz no vácuo} \rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{4.9}$$

A expressão de velocidade da luz no vácuo representa a integração da óptica no electromagnetismo.

Finalmente pode-se escrever as equações de Maxwell no âmbito da álgebra $\mathbb{C}\ell_3$ tendo em conta as expressões anteriores.

$$\begin{aligned}
 \text{Conservação do fluxo magnético} &\rightarrow \begin{cases} \text{Equação de Maxwell-Faraday} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{B}\mathbf{e}_{123}) + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \\ \text{Lei de Gauss magnética} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \\
 \text{Conservação de carga-corrente} &\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \lrcorner (\mathbf{H}\mathbf{e}_{123}) = -\mathbf{J} \rightarrow \text{Equação de Maxwell-Ampère} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho \quad \rightarrow \text{Lei de Gauss} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

As equações devem ser suplementadas com as relações constitutivas dos meios materiais em estudo, que neste caso se incide particularmente nos meios anisotrópicos nos casos de cristais uniaxiais e biaxiais.

Consideremos agora o caso específico de regiões sem fontes

$$\text{Regiões sem fonte do campo} \rightarrow \begin{cases} \varrho = 0 \\ \mathbf{J} = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

e campos com uma variação da forma

$$\text{ondas planas monocromáticas} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \} \\ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\omega \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \end{cases} \tag{4.12}$$

Nestas condições as equações de Maxwell reduzem-se na seguinte forma algébrica:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 &= \omega(\mathbf{B}_0 \mathbf{e}_{123}) \\
 \mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0 &= -\omega(\mathbf{D}_0 \mathbf{e}_{123}) \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_0 &= 0 \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Como nota, as equações (4.13) são válidas apenas para ondas planas e monocromáticas, e por uma questão de simplificação doravante omite-se o índice zero nas equações (4.13).

4.1.1 Equações de Maxwell-Boffi

Nota-se que é possível escrever as equações de Maxwell como sendo as equações de Maxwell-Boffi, reduzindo as quatro equações numa única equação em $\mathbb{C}\ell_3$ aplicando os procedimentos anteriormente utilizados. Nas equações de Maxwell-Boffi não é feito qualquer tipo de referência do campos \mathbf{D} e \mathbf{H} , ou sejam ignoram a quantidade dos meios materiais.

De seguida é apresentado as equações de Maxwell-Boffi escritas na linguagem vectorial:

$$\begin{aligned}
 \text{Conservação do fluxo magnético} &\rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \text{Equação de Maxwell-Faraday} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \text{Lei de Gauss magnética} \end{cases} \\
 \text{Conservação de carga-corrente} &\rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow \text{Equação de Maxwell-Ampère} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Lei de Gauss} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

No âmbito da álgebra em $\mathbb{C}\ell_3$, pode se reescrever as equações de Maxwell-Boffi, procedendo as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}
 \nabla \wedge \mathbf{E} &= (\nabla \times \mathbf{E}) \mathbf{e}_{123} \\
 \nabla \lrcorner (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) &= -\nabla \times \mathbf{B}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Feitas estas substituição obtém-se assim as equações de Maxwell-Boffi em $\mathbb{C}\ell_3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \mapsto \nabla \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} \right) = \eta_o \varrho_t \\ 1 \mapsto \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} \right) + \nabla \lrcorner (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) = -\mu_o \mathbf{J}_t \\ 2 \mapsto \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) + \nabla \wedge \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} \right) = 0 \\ 3 \mapsto \nabla \wedge (\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Como nota os números do lado esquerdo de cada equação de (4.16) indicam o grau das respectivas equações.

Efectuando uma soma graduada das quatro equações de (4.16), é possível obter uma única equação de Maxwell-Boffi em $\mathbb{C}\ell_3$, tendo em conta as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \wedge \mathbf{E} \\ \nabla \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} = \nabla \lrcorner \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} + \nabla \wedge \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \\ \nabla \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \right) = \frac{1}{c} \nabla \mathbf{E} + \nabla \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Obtendo assim a equação de Maxwell-Boffi em $\mathbb{C}\ell_3$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) \left(\frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \right) = \eta_o \left(\varrho_t - \frac{1}{c} \mathbf{J}_t \right) \quad (4.18)$$

4.2 Anisotropia em Álgebra Geométrica

Anisotropia significa que a magnitude de uma propriedade apenas pode ser definida ao longo de uma determinada direcção. Para ser mais específico, se o meio é electricamente anisotrópico, significa que existe um ângulo entre o vector campo eléctrico, \mathbf{E} , e o vector deslocamento eléctrico, que depende da direcção do espaço (euclidiano) \mathbb{R}^3 ao longo da qual \mathbf{E} é aplicado. Em outras palavras, em anisotropia não se pode escrever $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ onde ε_0 é a permissividade do vácuo e ε é a permissividade eléctrica relativa do meio. A solução apresentada é definir um

tensor permissividade eléctrica num dado sistema de coordenadas através da matriz 3×3 . Através da álgebra geométrica $\mathbb{C}\ell_3$, pode escrever simplesmente $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{E})$ uma função linear $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que mapeia vectores em vectores. A função dieléctrica ε caracteriza totalmente a propriedade do meio acima mencionado, podendo ser definida apenas ao longo de uma determinada direcção.

4.2.1 Anisotropia eléctrica

Começar-se-á por considerar que os meios em estudo são os meios não-magnéticos, sem perdas, ilimitados e lineares. Nos meios não-magnéticos tem-se $\mathbf{M} = 0$, logo a relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} é a mesma do vácuo, ou seja,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (4.19)$$

Tratando-se da anisotropia eléctrica a relação entre \mathbf{D} e \mathbf{E} será determinada por essa característica que o meio apresenta. Começa-se por analisar o comportamento dos vectores \mathbf{D} e \mathbf{E} consoante a variação do vector θ formado entre eles.

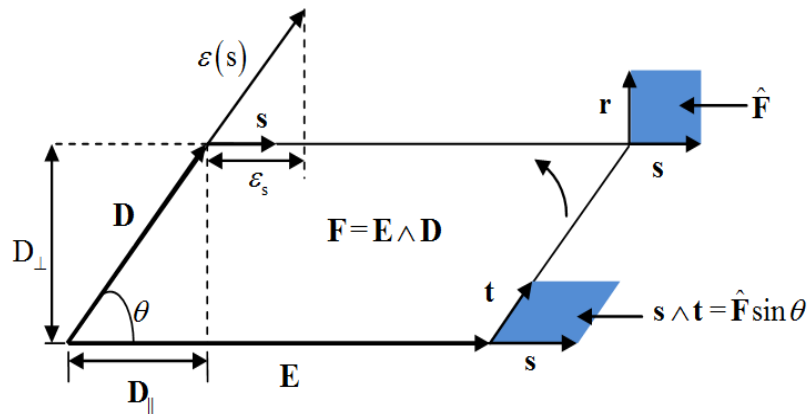


Figura 4.1: Caracterização da anisotropia através do bivector $\mathbf{F} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}$

Por definição um meio é anisotrópico quando o ângulo θ varia com a direcção s do campo eléctrico aplicado. Na Figura 4.1, assumamos que os vectores $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ são unitários, ou seja, $\mathbf{r}^2, \mathbf{s}^2, \mathbf{t}^2 = 1$.

Quando se aplica um campo eléctrico $\mathbf{E} = |\mathbf{E}|\mathbf{s}$ na direcção caracterizada pelo vector unitário \mathbf{s} , o meio responde com vector excitação eléctrica (ou deslocamento eléctrico) $\mathbf{D} = |\mathbf{D}|\mathbf{t}$ tal que $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = \cos \theta$ e $\mathbf{s} \wedge \mathbf{t} = \hat{\mathbf{F}} \sin \theta$.

Posto isto tem-se que:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = |\mathbf{E}|\mathbf{s} \\ \mathbf{D} = |\mathbf{D}|\mathbf{t} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{D} = |\mathbf{F}|\hat{\mathbf{F}} \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{s} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}}{\sin \theta} \Leftarrow \begin{cases} \mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{D}| \cos \theta \\ \mathbf{D}_{\perp} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{D}| \sin \theta \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_s \varepsilon(\mathbf{s}) \Rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon \cdot \varepsilon(\mathbf{s}) = |\varepsilon(\mathbf{s}) \cos \theta| \Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_s \varepsilon_s |\mathbf{E}| \quad (4.22)$$

Em relação ao bivector ainda se pode escrever que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{E} \wedge \mathbf{D} = |\mathbf{E}||\mathbf{D}|\mathbf{s} \wedge \mathbf{t} = \hat{\mathbf{F}} \sigma \sin \theta \\ \therefore \mathbf{ED} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{D} = \sigma \mathbf{s} \mathbf{t} = \sigma (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) = \sigma (\cos \theta + \hat{\mathbf{F}} \sin \theta) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Esta ultima expressão ainda pode ser reescrita da seguinte forma tendo em conta a formula de Euler em $\mathbb{C}\ell_3$.

$$\begin{cases} \sigma = |\mathbf{E}||\mathbf{D}| \\ \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{s} \mathbf{r} = \mathbf{s} \wedge \mathbf{r} \end{cases} \rightarrow \mathbf{ED} = \sigma \exp(\theta \hat{\mathbf{F}}) \quad (4.24)$$

O produto geométrico \mathbf{ED} caracteriza o meio, só quando o meio for isotrópico simples é que qualquer que seja a direcção \mathbf{s} se tem o seguinte:

$$\mathbf{ED} = \mathbf{DE} \Leftrightarrow \mathbf{E} \parallel \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{E} \wedge \mathbf{D} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{ED} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (4.25)$$

A expressão $\varepsilon_s = \varepsilon \cdot \varepsilon(s)$ representa a permissividade (relativa segundo) a direcção s , onde $\varepsilon(s)$ é a função dieléctrica.

Num meio anisotrópico a cada direcção s do espaço corresponde um escalar $\varepsilon_s = s \cdot \varepsilon(s)$. O meio isotrópico é um caso particular em que $\varepsilon_s = s \cdot \varepsilon(s)$ é uma constante ε_i que não depende da direcção s .

Para clarificar o conceito da constante dieléctrica relativa num meio anisotrópico é apresentado um exemplo.

Admitindo que o operador linear $\varepsilon: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ apresenta três valores próprios reais e distintos $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$, e por conveniência de cálculo posterior é apresentado o seguinte:

$$\gamma_3^2 + \gamma_1^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_3 = \alpha + 2\beta\gamma_3^2 \\ \varepsilon_2 = \alpha \\ \varepsilon_1 = \alpha - 2\beta\gamma_1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = 2\beta \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2\beta\gamma_1^2 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 = 2\beta\gamma_3^2 \end{cases} \quad (4.26)$$

Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 constituída pelos vectores próprios do operador considerado, isto é,

$$\begin{cases} \text{eixo } X_1 \rightarrow \varepsilon(\mathbf{e}_1) = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1 \\ \text{eixo } X_2 \rightarrow \varepsilon(\mathbf{e}_2) = \varepsilon_2 \mathbf{e}_2 \\ \text{eixo } X_3 \rightarrow \varepsilon(\mathbf{e}_3) = \varepsilon_3 \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (4.27)$$

Analisando o caso da Figura 4.2, facilmente pode-se verificar que a função dieléctrica pode ser caracterizada por cinco parâmetros (os três valores próprios $\varepsilon_3 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ e os dois vectores unitários $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$) não paralelos, por essa razão é designado de meio biaxial.

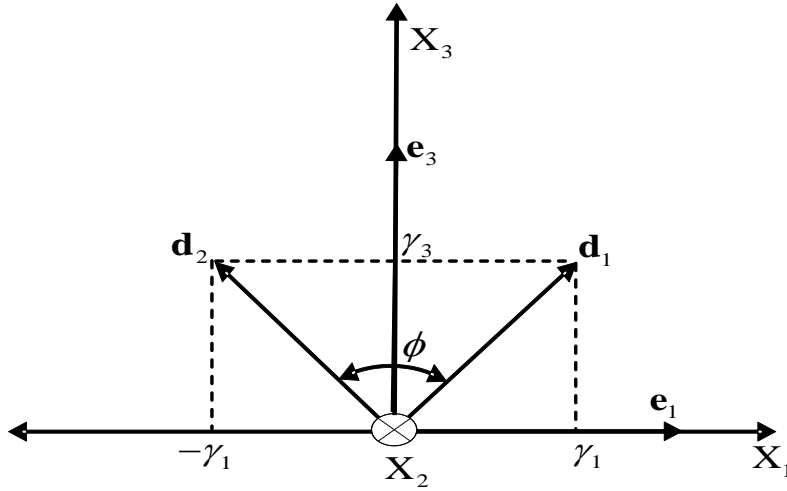


Figura 4.2: Representação dos vectores \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 , que definem o operador linear ε como sendo operador biaxial

De acordo com a figura tem-se o seguinte:

$$\begin{cases} \mathbf{d}_1 = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{d}_2 = -\gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (4.28)$$

Em que $\gamma_1 = \sin \frac{\phi}{2}$ e $\gamma_3 = \cos \frac{\phi}{2}$. A relação entre \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 é dado por,

$$\mathbf{d}_2 = R_\phi \mathbf{d}_1 \tilde{R}_\phi \quad (4.29)$$

Analisando a expressão (4.29), pode verificar que \mathbf{d}_2 é a rotação de \mathbf{d}_1 em $\mathbb{C}\ell_3$, onde R_ϕ um rotor dado por

$$R_\phi = \exp\left(\frac{\phi}{2} \mathbf{e}_{31}\right) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mathbf{e}_{31} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (4.30)$$

De seguida é feita uma demonstração de que é possível escrever o operador linear em termos dos vectores unitários \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 . Considerando um vector genérico $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, aplicando o operador linear $\varepsilon: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a esse vector, tem-se,

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \varepsilon_1 a_1 \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2 a_2 \mathbf{e}_2 + \varepsilon_3 a_3 \mathbf{e}_3 \quad (4.31)$$

Ou seja, pode ainda escrever,

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \varepsilon_2 a + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a_1 \mathbf{e}_1 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) a_3 \mathbf{e}_3 \quad (4.32)$$

Tendo em conta a figura, tem – se

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = \cos \phi = \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 = \frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \quad (4.33)$$

Assim, vem

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + \cos \phi) &= \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) &= \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \end{aligned} \right. \quad (4.34)$$

Como é admitido que $\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 > 0$ e ainda que

$$\left| \begin{aligned} \cos \frac{\phi}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}} \\ \sin \frac{\phi}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}} \end{aligned} \right. \quad (4.35)$$

Infere-se que

$$\left| \begin{aligned} \gamma_3 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \\ \gamma_1 &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}} \end{aligned} \right. \quad (4.36)$$

Posto isto, há que escrever os termos $a_1 \mathbf{e}_1 + a_3 \mathbf{e}_3$ em função de \mathbf{a}, \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 . Assim tem-se

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2}{2\gamma_1} \\ \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2}{2\gamma_3} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} a_1 = \frac{(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{a}}{2\gamma_1} \\ a_2 = \frac{(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{a}}{2\gamma_3} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} a_1 \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2)}{4\gamma_1^2} (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \\ a_3 \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)}{4\gamma_3^2} (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) \end{array} \right| \quad (4.37)$$

Substituindo as expressões (4.37) em (4.32) obtém-se o seguinte:

$$\varepsilon(\mathbf{a}) = \varepsilon_2 a + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2)}{4\gamma_1^2} (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)}{4\gamma_3^2} (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) \quad (4.38)$$

E considerando que

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = \varepsilon_2 \\ \beta = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \end{array} \right| \quad (4.39)$$

Finalmente a expressão do operador linear

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{a}) &= \alpha \mathbf{a} + \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}{4} \left[(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)) (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2)) (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) \right] \\ \therefore \varepsilon(\mathbf{a}) &= \alpha \mathbf{a} + \beta \left[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{d}_1 \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Em relação ao operador uniaxial, aparecerá como um caso particular do caso biaxial. Desta forma, um caso particular corresponde a ter-se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Neste caso particular, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\perp}$ e $\varepsilon_3 = \varepsilon_{\parallel}$.

Tem-se então

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = \cos \phi = \frac{\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}} = 1 \Rightarrow \phi = 0 \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = \mathbf{c} \quad (4.41)$$

$$\therefore \varepsilon(\mathbf{a}) = \varepsilon_{\perp} \mathbf{a} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} \quad (4.42)$$

Deste modo diz-se que no operador uniaxial os dois eixos \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 se reduzem a um único eixo \mathbf{c} . Particularizando agora o caso uniaxial, pode-se introduzir um novo operador. Um caso particular do caso uniaxial corresponde a ter $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_i$, logo a expressão (4.42) reduz-se a $\varepsilon(\mathbf{a}) = \varepsilon_i \mathbf{a}$. Posto isto está-se perante a um operador isotrópico uma vez que todas as direcções do espaço \mathbb{R}^3 são equivalentes.

Resumindo, os vectores unitários $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ caracterizam o meio biaxial; o vector unitário \mathbf{c} caracteriza o meio uniaxial. Num meio isotrópico não é possível discriminar qualquer direcção preferencial.

$$\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{E}) \rightarrow \begin{cases} \text{meio biaxial} \mapsto \varepsilon(\mathbf{E}) = \alpha \mathbf{E} + \beta [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{d}_1] \\ \text{meio uniaxial} \mapsto \varepsilon(\mathbf{E}) = \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{c} \\ \text{meio isotropico} \mapsto \varepsilon(\mathbf{E}) = \varepsilon_i \mathbf{E} \end{cases} \quad (4.43)$$

A inversa da função dieléctrica ε é uma função de impermeabilidade, definida da seguinte forma $\eta = \varepsilon^{-1}$ tal que $\mathbf{E} = \frac{\eta(\mathbf{D})}{\varepsilon_0}$.

Para que se consiga encontrar os vectores que caracterizam a função η , o campo eléctrico é escrito da seguinte forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{E}_3 \mathbf{e}_3 \quad (4.44)$$

Onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ são eixos dieléctricos principais, que correspondem aos valores próprios $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3 respectivamente ($\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$). Assim sendo tem-se, $\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{e}_2 + \varepsilon_3 \mathbf{E}_3 \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{E} = \eta_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{e}_2 + \eta_3 \mathbf{D}_3 \mathbf{e}_3$ onde $\eta_i = \varepsilon_i^{-1}$ com $(i=1, 2, 3)$.

Como foi referido anteriormente que \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 são os vectores que caracterizam ε , então \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 serão os dois vectores unitários que caracterizam η . A relação entre os eixos $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$, que caracterizam a função dieléctrica ε , e os eixos $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$, que caracterizam a inversa da função dieléctrica η encontra-se indicada na figura 12.

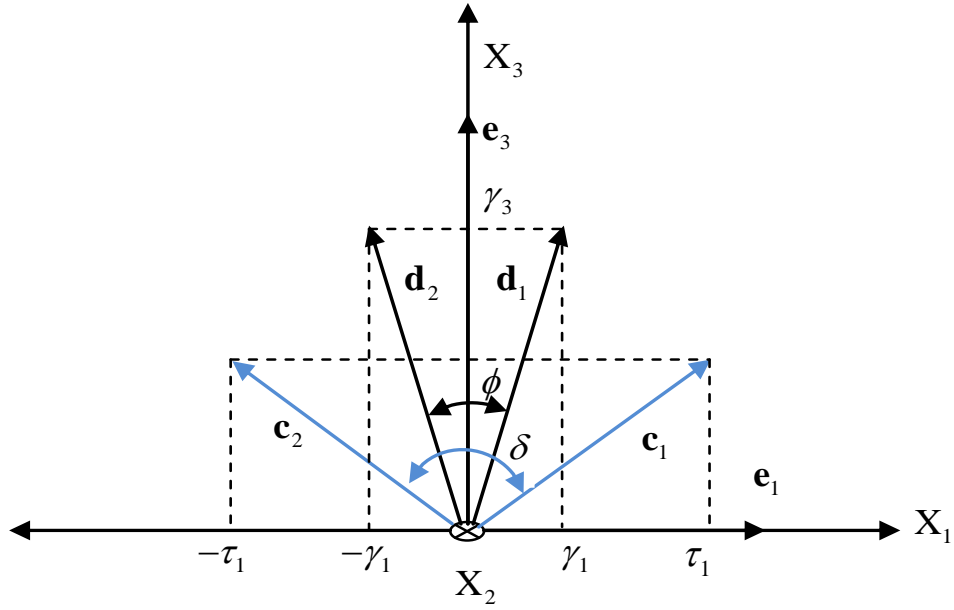


Figura 4.3: Representação dos vectores \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 , que caracterizam ε e \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 que caracterizam η no meio biaxial

Da Figura 4.3, obtém-se que,

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \tau_1 \mathbf{e}_1 + \tau_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c}_2 = -\tau_1 \mathbf{e}_1 + \tau_3 \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (4.45)$$

E que τ_1 e τ_3 são dados por:

$$\begin{cases} \tau_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}} \gamma_1 \\ \tau_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \gamma_3 \end{cases} \quad (4.46)$$

Com $\tau_1 = \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$ e $\tau_3 = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$

Posto isto, pode escrever o seguinte:

$$\mathbf{c}_2 = R_\delta \mathbf{c}_1 \tilde{R}_\delta \quad (4.47)$$

Onde o rotor R_δ é apresentado da seguinte forma $R_\delta = \exp\left(\frac{\delta \mathbf{e}_{31}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + \mathbf{e}_{31} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$.

De seguida é apresentado um sistema de equações que relacionam os vectores unitários \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 que caracterizam a função inversa com os vectores unitários \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 que caracterizam a função dieléctrica.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$\text{Onde } \beta = \frac{\sqrt{\varepsilon_3} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_1}}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ e } \alpha = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}}{\varepsilon_2}$$

Tendo em conta as considerações anteriores, considera-se que $\gamma = \cosh(\xi)$ e $\gamma\beta = \sinh(\xi)$, levando assim a $\beta = \tanh(\xi)$, $\xi = \ln[(1 + \beta)(1 - \beta)] / 2 = \ln(\varepsilon_3 / \varepsilon_1) / 4$ e $\tan(\delta / 2) = \sqrt{\varepsilon_3 / \varepsilon_1} \tan(\phi / 2)$.

Finalmente, está em condições de descrever a expressão da função inversa da função dieléctrica

$$\eta(\mathbf{D}) = \eta_2 \mathbf{D} + [(\eta_3 - \eta_1) / 2] [(\mathbf{D} \cdot \mathbf{c}_1) \mathbf{c}_2 + (\mathbf{D} \cdot \mathbf{c}_2) \mathbf{c}_1] \quad (4.49)$$

Os eixos ópticos de um cristal biaxial são os eixos definidos pelos vectores unitários \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 e não os definidos pelos vectores \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 . No caso dos meios uniaxiais, para se obter a função inversa da função dieléctrica, faz-se $\eta_1 = \varepsilon_1^{-1} = \eta_2 = \varepsilon_2^{-1} = \eta_\perp$, $\eta_3 = \varepsilon_3^{-1} = \eta_\parallel$ e $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}$.

Note-se que nos cristais uniaxiais o eixo óptico e o eixo dieléctrico são o mesmo, logo são definidos pelo mesmo vector \mathbf{c} .

Assim, vem

$$\eta \mathbf{D} = \eta_{\perp} \mathbf{D} + (\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}) [(\mathbf{D} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c}] \quad (4.50)$$

4.2.2 Propagação das ondas electromagnéticas em meios anisotrópicos

Através da álgebra geométrica $\mathbb{C}\ell_3$, pode-se analisar a propagação de ondas electromagnéticas num meio anisotrópico, particularmente em cristais uniaxiais e biaxiais. A variação do campo eléctrico de uma onda electromagnética em que k_0 é a constante de propagação do vácuo, $\hat{\mathbf{k}}$ o vector unitário que caracteriza \mathbf{k} da constante de propagação, n o índice de refração efectivo da onda e \mathbf{n} o vector índice de refração efectivo.

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{k} = k_0 \mathbf{n} \\ \mathbf{n} = n \hat{\mathbf{k}} \end{cases} \rightarrow \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \exp[ik_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \quad (4.51)$$

$$\therefore \mathbf{E}(r, t) = \Re \left\{ \mathbf{E}_0 \exp[ik_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \right\}$$

No âmbito da álgebra $\mathbb{C}\ell_3$, as equações de Maxwell para as regiões sem fontes podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = c \mathbf{B} \mathbf{e}_{123} \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} = -c \mathbf{D} \mathbf{e}_{123} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

A equação $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ mostra, desde já, que todas as ondas são TM (transversais magnéticas).

4.2.2.1 Cristais Uniaxiais

Tal como foi visto anteriormente nos meios uniaxiais, a função dieléctrica é dada por:

$$\varepsilon(\mathbf{E}) = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E})\mathbf{c} \quad (4.53)$$

Habitualmente, nos cristais uniaxiais, usam-se como notação, $\varepsilon_{\perp} = n_o^2$ e $\varepsilon_{\parallel} = n_e^2$. O cristal uniaxial diz-se positivo quando $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$ e negativo quando $\varepsilon_{\parallel} < \varepsilon_{\perp}$.

Recordando da relação constitutiva do meio $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{E})$, que é equivalente escrever

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \eta(\mathbf{D}), \text{ recorrendo a função inversa sempre que esta existir.}$$

Como $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, vem sucessivamente

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{n}_{\perp}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) &= n^2 \mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} = n^2 \mathbf{E}_{\perp} \\ \mathbf{n}_{\perp}(\mathbf{B} \mathbf{e}_{123}) &= (\mathbf{n} \wedge \mathbf{B})\mathbf{e}_{123} = \mu_0 (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})\mathbf{e}_{123} = \mu_0 c \mathbf{D} = \frac{1}{c} \varepsilon(\mathbf{E}) \end{aligned} \right. \quad (4.54)$$

Onde infere-se que

$$\begin{aligned} n^2 \mathbf{E}_{\perp} &= \varepsilon(\mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{E} = n^2 \eta(\mathbf{E}_{\perp}) \\ \therefore \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\perp} \Rightarrow \mathbf{E}_{\parallel} = n^2 \eta(\mathbf{E}_{\perp}) - \mathbf{E}_{\perp} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Na equação (4.55), a componente paralela do campo eléctrico, \mathbf{E}_{\parallel} , pode ser obtida em termos da componente perpendicular, \mathbf{E}_{\perp} desde que n seja conhecido.

A componente paralela do campo eléctrico, \mathbf{E}_{\parallel} , é definida como sendo a respectiva componente segundo $\hat{\mathbf{k}}$, ou seja, tal que $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0$.

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{n^2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} \Rightarrow n^2 \mathbf{E}_{\perp} = n^2 (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\parallel}) = n^2 \mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} \quad (4.56)$$

A equação das ondas,

$$\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_{\parallel} = 0 \quad (4.57)$$

Resulta de forma imediata, dá própria definição de \mathbf{E}_{\parallel} .

Como tal vem então,

$$\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_{\parallel} = n^2 \left[\hat{\mathbf{k}} \wedge \eta(\mathbf{E}_{\perp}) \right] - \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad (4.58)$$

Notando que

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_0 = \eta_{\perp} = \frac{1}{n_0^2} \\ \beta_0 = \eta_{\parallel} - \eta_{\perp} = \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \eta(\mathbf{E}_{\perp}) = \alpha_0 \mathbf{E}_{\perp} + \beta_0 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_{\perp}) \mathbf{c} \\ \hat{\mathbf{k}} \wedge \eta(\mathbf{E}_{\perp}) = \alpha_0 (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_{\perp}) + \beta_0 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_{\perp}) (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) \end{array} \right. \quad (4.59)$$

Nestas condições obtém-se finalmente a equação das ondas num cristal uniaxial

$$(\alpha_0 n^2 - 1)(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_{\perp}) + \beta_0 n^2 (\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_{\perp})(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) = 0 \quad (4.60)$$

Aplicando a contracção à esquerda à equação das ondas num cristal uniaxial, com $\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}$, obtém-se as duas ondas características, ou ondas isonormais (onda extraordinária e onda ordinária) do cristal uniaxial.

$$\underbrace{\left[(1 - \alpha_0 n^2) + \beta_0 n^2 (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2 \right]}_{\text{onda extraordinária}} \underbrace{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_{\perp})}_{\text{onda ordinária}} = 0 \quad (4.61)$$

Recapitulando a operação de contracção descrita no capítulo 2 pode-se demonstrar como se obtém a expressão das ondas características.

No caso geral tem-se que:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \quad (4.62)$$

Recorrendo a expressão geral de contracção obtém-se o seguinte:

$$\left| \begin{array}{l} (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) \lrcorner (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_{\perp}) = (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_{\perp}) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_{\perp} \\ (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) \lrcorner (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}) = (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2 \end{array} \right. \quad (4.63)$$

A onda ordinária resulta da solução $\mathbf{c} \cdot \mathbf{E}_\perp = 0$. Substituindo esta solução na equação das ondas, obtém-se

$$\begin{aligned} (\alpha_0 n^2 - 1)(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_\perp) &= 0 \Rightarrow \alpha_0 n^2 - 1 = 0 \\ \therefore \text{Onda ordinária} &\rightarrow n^2 = \frac{1}{\alpha_0} = n_o^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Por outro lado, a onda extraordinária resulta da outra solução da expressão (4.61), ou seja da equação

$$\left[(1 - \alpha_0 n^2) + \beta_0 n^2 (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2 \right] = 0 \quad (4.65)$$

Desenvolvendo esta equação tem-se que:

$$\frac{1}{n^2} = \alpha_0 - \beta_0 (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2 \quad (4.66)$$

Considerando que,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c} = \cos \theta \\ (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2 = -\sin^2 \theta \end{cases} \quad (4.67)$$

E substituindo-a na expressão (4.66) obtém-se

$$\frac{1}{n^2} = \alpha_0 + \beta_0 \sin^2 \theta \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (4.68)$$

Finalmente tem-se então a onda extraordinária:

$$n^2 = \frac{n_o^2 n_e^2}{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{c})^2 n_e^2 - (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c})^2 n_o^2} \quad (4.69)$$

Nas Figuras 4.4 e 4.5, estão representadas as duas superfícies do vector \mathbf{k} (para a onda ordinária e onda extraordinária no caso de um cristal uniaxial positivo ($\varepsilon_\parallel > \varepsilon_\perp$) e no caso de um cristal uniaxial negativo ($\varepsilon_\parallel < \varepsilon_\perp$)).

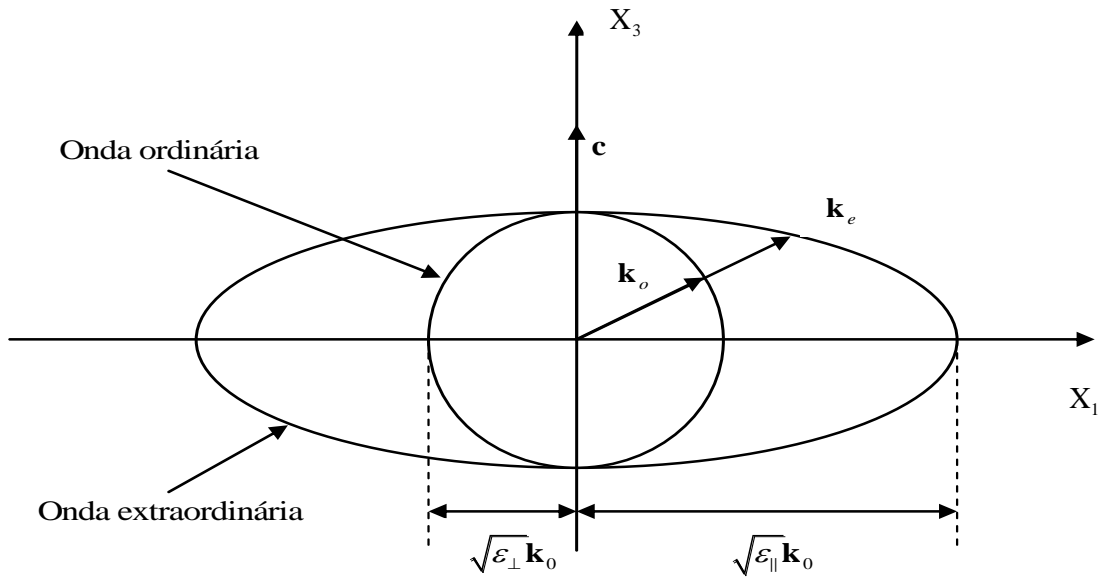


Figura 4.4: Representação da onda ordinária e onda extraordinária para um cristal uniaxial positivo, $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$

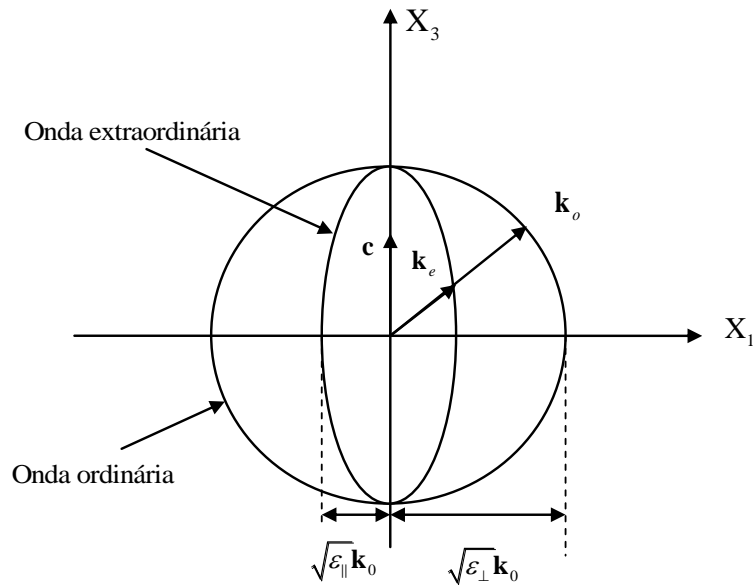


Figura 4.5: Representação da onda ordinária e extraordinária para um cristal uniaxial negativo, $\epsilon_{\parallel} < \epsilon_{\perp}$

4.2.2.2 Cristais biaxiais

De seguida serão apresentados as duas características, ou ondas isonormais, que se podem propagar num cristal biaxial não magnético sem perdas, ou seja num meio caracterizado por $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{E})$ e $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, onde a função dieléctrica é dada pela expressão (4.40).

Considerando a propagação de ondas monocromáticas e a expressão (4.52), tem-se,

$$\left\{ \begin{array}{l} n^2 \mathbf{E}_\perp = \varepsilon(\mathbf{E}) \\ \mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}} \end{array} \right. \quad (4.70)$$

Recorrendo a expressão (4.49) da inversa da função dieléctrica, pode escrever também,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{w} = n^2 \eta(\mathbf{E}_\perp) - \mathbf{E}_\perp \end{array} \right. \quad (4.71)$$

Tal como no caso dos cristais uniaxiais, aplica-se o mesmo procedimento para o caso dos cristais biaxiais. Deste modo vem que,

$$(\alpha_0 n^2 - 1)(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_\perp) + \beta_0 n^2 \left[(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{E}_\perp)(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}_2) + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{E}_\perp)(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}_1) \right] \quad (4.72)$$

Onde $\alpha_0 = \eta_2$ e $\beta_0 = \frac{\eta_3 - \eta_1}{2}$.

Introduzindo os vectores

$$\mathbf{u} = -(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}_1) \mathbf{e}_{123} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = -(\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}_2) \mathbf{e}_{123} \quad (4.73)$$

E aplicando a contracção a esquerda dos bivectores $\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}_1$ e $\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{c}_2$ com a equação das ondas num cristal biaxial, obtém-se

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{E}_\perp = \frac{n^2 \beta_0 \mathbf{u}^2}{1 - n^2 (\alpha_0 + \beta_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{E}_\perp), \quad \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{E}_\perp = \frac{n^2 \beta_0 \mathbf{v}^2}{1 - n^2 (\alpha_0 + \beta_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{E}_\perp) \quad (4.74)$$

Ou apenas numa expressão,

$$\left\{ 1 - \frac{n^4 \beta_0^2 \mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2}{[1 - n^2 (\alpha_0 + \beta_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})]^2} \right\} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{E}_\perp) = 0 \quad (4.75)$$

As ondas características correspondentes à direcção de propagação $\hat{\mathbf{k}}$ (onda normal) são caracterizadas por dois índices de refacção distintos (birrefringência) n_- e n_+ de tal modo que

$$\frac{1}{n_\pm^2} = \alpha_0 + \beta_0 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \pm \sqrt{\mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2}) \quad (4.76)$$

Da expressão (4.76) pode-se concluir para as ondas que se propagam ao longo de \mathbf{c}_1 ou \mathbf{c}_2 , de acordo com a expressão (4.73), tem-se $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{v} = 0$ (respectivamente) e portanto $n_\pm^2 = \frac{1}{\alpha_0} = \varepsilon_2$, isto é os dois índices de refacção são iguais. De acordo com definição do eixo óptico, conclui-se que os dois vectores unitários \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 que caracterizam a função de impermeabilidade são os dois eixos ópticos do cristal biaxial. Num cristal biaxial as duas ondas características não podem ser classificadas como ondas ordinárias e extraordinária.

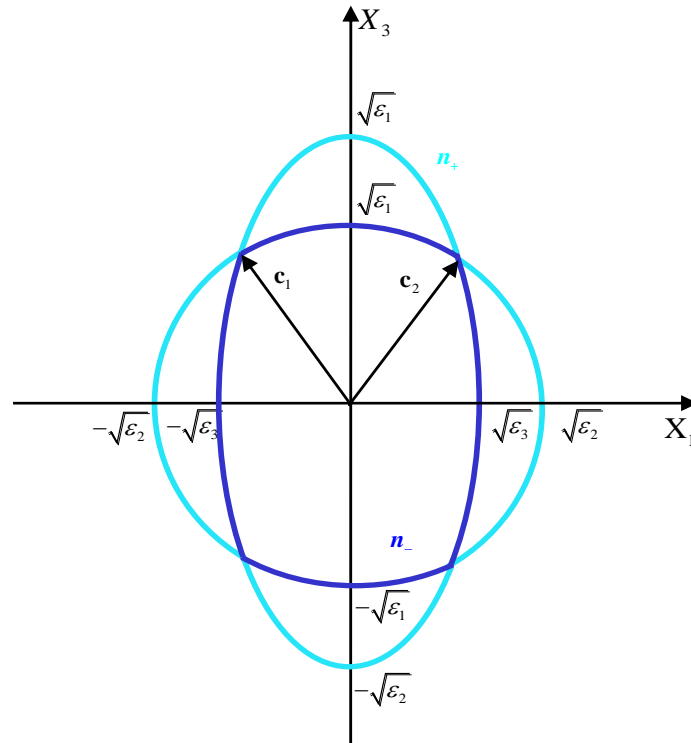


Figura 4.6: Representação dos índices de refacção correspondentes as ondas características

4.3 Conclusões

O cálculo tensorial ou diádico tem sido a forma mais comum de introduzir a anisotropia no âmbito de electromagnetismo, porém, este método implica a utilização de um sistema de coordenadas onde o problema é geralmente resolvido através do sistema de coordenadas principais do tensor dieléctrico. Uma alternativa a esta solução é utilização da álgebra geométrica, que permite uma abordagem essencialmente geométrica da anisotropia, isto é, independentemente de quaisquer coordenadas e onde o conceito de tensor é desnecessário. Destaca-se ainda neste capítulo, o estudo dos cristais uniaxiais e biaxiais. Em ambos os casos é necessário determinar as correspondentes funções dieléctricas e as suas inversas (se existirem) de modo a ser possível de encontrar as equações de onda correspondente a cada caso. Com base nestas deduções e fazendo a contracção a esquerda à equação das ondas com o produto exterior entre o vector que representa a direcção de propagação e o eixo óptico do cristal em causa, pode-se obter os índices de refração em cada caso. No caso dos cristais uniaxiais é possível fazer a distinção entre a onda ordinária e onda extraordinária mas no caso dos cristais biaxiais tal distinção é impossível, porque as superfícies do índice de refração correspondentes a cada caso apresentam simultaneamente características de onda extraordinária.

Capítulo 5

Aplicações

As placas retardadoras surgem neste capítulo como uma aplicação dos cristais uniaxiais descritas no capítulo 3.

5.1 Placas Retardadoras

As placas retardadoras são dispositivos ópticos que introduzem uma determinada defasagem relativa entre as componentes do campo eléctrico e da luz que atravessam segundo os eixos característicos. Estas placas são constituídas por material anisotrópico transparente, tipicamente de quartzo-uniaxial positivo ou de calcite-uniaxial negativo. Elas modificam o estado da luz sem alterar a irradiação.

A figura seguinte descreve uma placa retardadora de material transparente anisotrópico que, se incidir em $x_2 = 0$ uma onda polarizada linearmente, observe em $x_2 = l$ uma onda transmitida com polarização elíptica. A elipticidade dependerá do valor do comprimento de onda de operação, da birrefringência do material e da espessura l da placa.

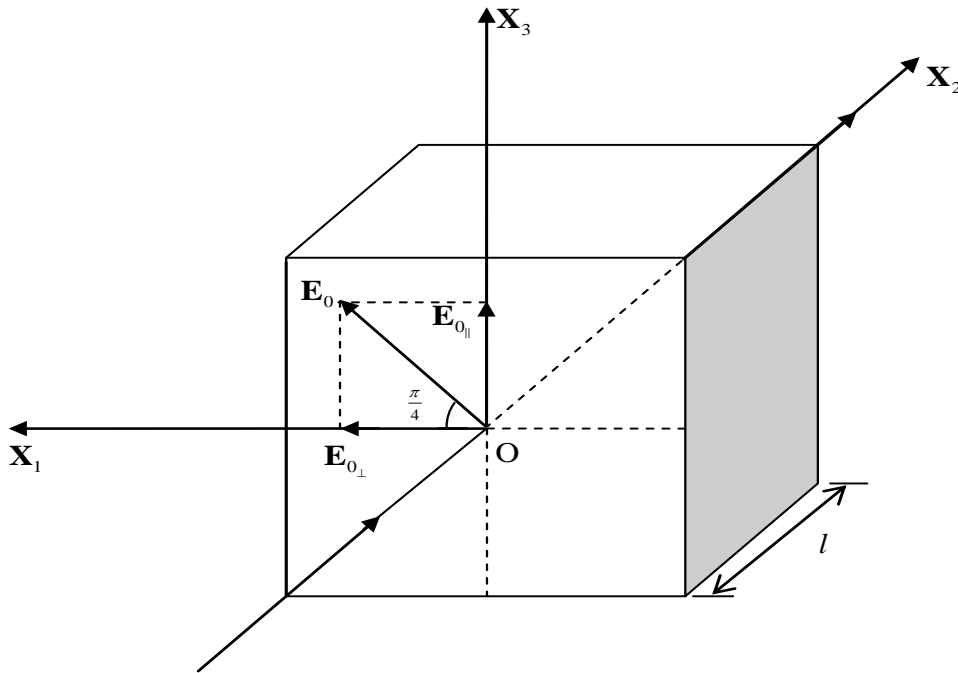


Figura 5.1: Placa retardadora de material anisotrópico transparente

Considerando-se um cristal uniaxial de espessura l , com o eixo óptico segundo X_3 , tal como presente na Figura 5.1. Na face que assente no plano definido pelos eixos X_1 e X_3 , incide luz polarizada linearmente a 45° com o eixo. Procedendo a decomposição do campo eléctrico \mathbf{E} , nas suas componentes paralelas e perpendicular ao eixo óptico, tem-se para $X_2 = 0$:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{\perp_0} + \mathbf{E}_{\parallel_0} = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_3 \quad (5.1)$$

A componente \mathbf{E}_\perp , normal ao eixo óptico, propaga-se segundo X_2 na forma de uma onda ordinária, com velocidade ν_o . A componente \mathbf{E}_\parallel , paralela ao eixo óptico, propaga-se na forma de uma onda extraordinária, com velocidade ν_e .

No caso da calcite, em que $\nu_e > \nu_o$, o eixo X_3 constitui o eixo rápido da placa, no caso do quartzo, em que $\nu_e < \nu_o$, o eixo X_3 constitui o eixo lento da placa. A saída da placa, ou seja, em $X_2 = l$, verifica-se que as componentes \mathbf{E}_\parallel e \mathbf{E}_\perp do campo eléctrico emergem desfasadas, dando origem a polarização elíptica, isto é:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\perp = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{2}} e^{-i\phi_o} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{E}_\parallel = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{2}} e^{-i\phi_e} \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $\phi_o = n_o k_0 l = \omega l / \nu_o$ e $\phi_e = n_e k_0 l = \omega l / \nu_e$.

A diferença de fase δ entre os ângulos ϕ_e e ϕ_o , representa uma medida do grau de elipticidade, dado pela seguinte expressão:

$$\delta = \phi_e - \phi_o = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n l \quad (5.3)$$

Em que l representa a espessura da placa, λ_0 é o comprimento da onda no vazio e

$$\Delta n = n_e - n_o \quad (5.4)$$

Onde n_e e n_o são os índices de refração, relacionados com os raios extraordinários e ordinários.

Se para o comprimento de onda em causa a espessura da placa for tal que,

$$l \Delta n = m \lambda_0 \quad m: \text{inteiro} \quad (5.5)$$

Está-se na presença de uma placa de onda completa, de ordem m , o que implica que a diferença de fase seja $\delta = 0$ considerando o intervalo fundamental. Neste caso a radiação à saída da placa tem polarização linear e paralela em relação a polarização incidente em $X_2 = 0$.

5.2 Placas de meia onda

A placa de meia onda é um retardador que introduz uma desfasagem de 180° entre as componentes ortogonais de uma luz linearmente polarizada incidente. Este tipo de placa afecta a orientação da polarização, mas não a sua forma. Desta forma, quando os raios extraordinários e ordinários emergem da placa existirá uma diferença de caminho óptico de $\lambda_0 / 2$ entre eles, e a direcção de polarização da luz vai ser rodado de 2θ , sendo θ um ângulo entre a direcção de polarização e o eixo óptico da placa. Neste caso a espessura da placa obedece a seguinte expressão:

$$l(\Delta n) = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (5.6)$$

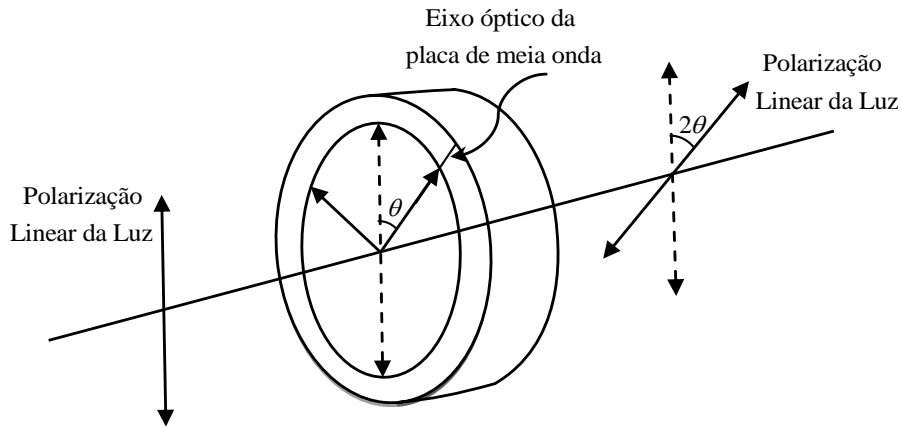


Figura 5.2: Rotação da polarização linear por uma placa de meia onda

5.3 Placas de quarto de onda

A placa de quarto de onda é um retardador que introduz uma desfasagem de 90° entre as duas componentes ortogonais do feixe de luz incidente. Essa diferença de 90° pode converter luz linearmente polarizada em elipticamente ou circularmente polarizada e vice-versa, dependendo da direcção de polarização da luz incidente em relação ao eixo óptico do material. Se uma luz linearmente polarizada incide numa placa de um quarto de onda com direcção de polarização de 45° de cada um dos eixos principais, as duas componentes terão a mesma amplitude de entrada, resultante em luz circularmente polarizada na saída da placa. Da mesma forma, a incidência de luz circularmente polarizada gera luz linearmente polarizada a saída, como o eixo de polarização a 45° de ambos os eixos principais.

Neste caso para uma placa de quarto de onda, de ordem m a espessura do material birrefringente obedece a seguinte expressão:

$$l(\Delta n) = \left(m + \frac{1}{4}\right) \lambda_0 \quad (5.7)$$

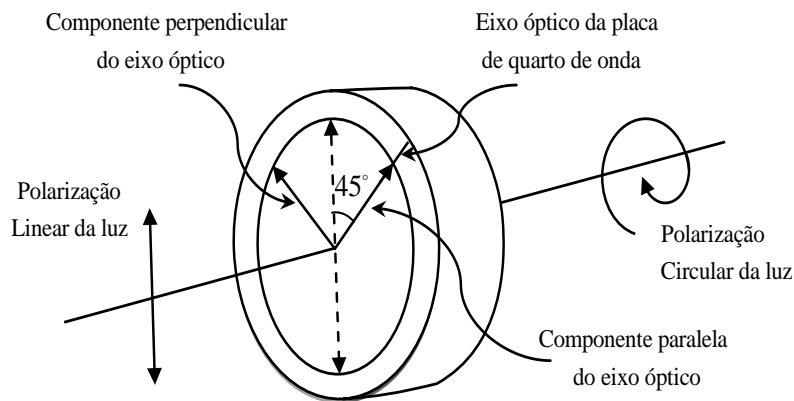


Figura 5.3: Conversão da polarização linear e circular por uma placa de quarto de onda

Os resultados obtidos até agora para a placa retardadora são por si só conceptuais, ou seja, uma placa retardadora de um determinado tipo e com uma certa espessura só desempenha a função prevista a uma determinada frequência óptica. Como exemplo, toma-se uma placa de quarta onda dimensionada para operar a uma determinada frequência f_0 apresentando polarização circular, no entanto se for utilizada para outra frequência $f'_0 \neq f_0$, originará uma polarização elíptica. Contudo se a frequência f'_0 for relativamente próximo de f_0 , $f'_0 \approx f_0$, a placa produzirá uma polarização circular, sendo para isso necessário rodar ligeiramente a placa em torno do seu eixo rápido ou lento. Uma rotação em torno do eixo rápido fará diminuir δ enquanto que uma rotação em torno do eixo lento fará aumentar δ , sendo possível obter a diferença de fase desejada de $\delta = \frac{\pi}{2}$.

5.4 Placas de ordem múltipla

A influência da frequência sobre a diferença de fase da placa retardadora resulta não só da variação do comprimento de onda no vazio, λ_0 , mas também da variação da birrefringência $\Delta n = n_e - n_o$, devido a natureza mais ou menos dispersiva do material da placa. Através das expressões (5.5), (5.6) e (5.7), pode-se calcular a espessura das placas retardadoras de ordem m dos materiais de calcite e quartzo, mencionados anteriormente. Considerando um exemplo de uma placa de meia onda de ordem zero, $m=0$, de espessura $l = \lambda_0 / (2\Delta n)$, que no caso da radiação de um laser de He-Ne, $\lambda_0 = 0.633\mu m$, tem-se para a espessura da placa dos materiais acima mencionados os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \text{Quartzo} : \Delta n = 0.009 &\rightarrow l = 35\mu m \\ \text{Calcite} : \Delta n = 0.172 &\rightarrow l = 1.84\mu m \end{aligned} \tag{5.8}$$

Como se pode observar os valores da espessura das placas são extremamente pequenas, logo placas com esta espessura são quase impossível de fabricar e impraticáveis no que respeita ao polimento, especialmente para calcite, por se tratar de um material fortemente birrefringente. Por este motivo as placas retardadoras não são de ordem zero mas sim de ordem múltipla. Tomando como exemplo o quartzo com $m=15$, obter-se-ia uma placa de meia onda ($\delta = \pi$) com uma espessura $l = 1\text{ mm}$, que já é uma dimensão manuseável.

Apesar das placas de ordem múltipla, serem mais fáceis de realizar, apresentam a desvantagem de não serem facilmente empregues no caso em que as frequências não são exactamente iguais às nominais, uma vez que a sua sensibilidade a pequenos desvios na frequência é muito mais crítica que nas placas de ordem zero. Considerando um exemplo de uma placa retardadora de meia onda, em que se houver um desvio de frequência Δf relativo a frequência nominal f_0 , causará uma alteração na diferença de fase:

$$\Delta\delta = \pi(2m+1)\frac{\Delta f}{f_0} \quad (5.9)$$

Esta alteração poderá ser impossível de compensar, por rotação em torno dos eixos lento ou rápido da placa, ou sendo possível tornará crítico e difícil de realizar. Apesar desta dificuldade, as placas retardadoras de ordem múltipla apresentam a vantagem de poderem manter o seu carácter a frequências bem distintas (dual wavelength plates). Exemplificando, com a placa de meia onda anteriormente mencionada, é possível construir uma placa em simultâneo para λ_1 e λ_2 , bastando para isso que se escolha a espessura l de modo que a placa seja de ordem m_1 para um comprimento de onda e de ordem m_2 para o outro,

$$l = \begin{cases} \frac{1}{\Delta n_1} \left(m_1 + \frac{1}{2} \right) \lambda_1 \\ \frac{1}{\Delta n_2} \left(m_2 + \frac{1}{2} \right) \lambda_2 \end{cases} \quad (5.10)$$

Onde Δn_1 e Δn_2 representam o valor da birrefringência para $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$ respectivamente.

Apesar das placas retardadoras de ordem zero serem difíceis de fabricar, existe uma técnica onde é possível construí-las com espessuras manuseáveis e sem as desvantagens mencionadas para as placas de ordem múltipla, através de uma combinação de duas placas de ordem múltipla, uma de ordem m e outra de ordem $m+1$, de maneira que o eixo rápido de uma delas coincide com o eixo lento da outra e vice-versa, de modo que a birrefringência das duas placas é quase cancelada.

5.4 Birrefringência em Meios Anisotrópicos

Considerando uma interface, em $x=0$, entre o meio isotrópico de índice de refração n_i correspondente a região $x>0$ e um cristal uniaxial positivo com índices ordinário n_o e extraordinário n_e correspondente a região $x<0$ em que o eixo óptico coincide com o eixo z .

A incidência faz-se do meio 1 para o meio 2, no meio anisotrópico (região $x<0$) dá-se uma dupla refração ou birrefringência, sendo excitados simultaneamente a onda ordinária e a onda extraordinária.

Considerando que incide uma onda plana e monocromática proveniente do meio isotrópico, com uma constante de propagação $k_i = n_i k_0$ e fazendo um ângulo θ_i com o eixo x , tem-se

$$\beta = n_i k_0 \sin \theta_i \quad (5.11)$$

$$q_i = n_i k_0 \cos \theta_i \quad (5.12)$$

No meio 2 são excitadas, simultaneamente a onda extraordinária e a onda ordinária. Assim para a onda ordinária tem-se o seguinte:

$$\beta = n_o k_0 \sin \theta_o \quad (5.13)$$

$$q_o = n_o k_0 \cos \theta_o \quad (5.14)$$

Através das equações (5.11) e (5.13) obtém-se a relação entre os ângulos θ_i e θ_o ou seja a conhecida lei de Snell. Porém o mesmo não se aplica em relação a onda extraordinária uma vez que o índice de refração efectivo é ele próprio, função do ângulo θ_e , ou seja tem-se $n = n(\theta_e)$.

Assim, tem-se que

$$\beta = n(\theta_e) k_0 \sin \theta_e \quad (5.15)$$

$$q_e = n(\theta_e) k_0 \cos \theta_e \quad (5.16)$$

Com base na equação (4.68) pode-se determinar o ângulo θ_e e considerando $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_e$, resulta que

$$\frac{\cos^2 \theta_e}{n_e^2 k_0^2} + \frac{\sin^2 \theta_e}{n_o^2 k_0^2} = \frac{1}{n^2(\theta_e) k_0^2} \quad (5.17)$$

Das equações (5.15) e (5.16), resulta

$$q_e = \beta \cot \theta_e \quad (5.18)$$

$$n^2(\theta_e)k_0^2 = q_e^2 + \beta^2 \quad (5.19)$$

Pelo que a equação (5.17) ainda se pode escrever da seguinte forma

$$\frac{\cos^2 \theta_e}{n_e^2 k_0^2} + \frac{\sin^2 \theta_e}{n_0^2 k_0^2} = \frac{\sin^2 \theta_e}{\beta^2} \quad (5.20)$$

Através da equação (5.20), pode-se calcular o ângulo θ_e uma vez que β pode ser determinado da equação (5.11). Da equação (5.20) vem que

$$\sin^2 \theta_e = \frac{\sin^2 \theta_i}{\frac{n_e^2}{n_i^2} - \left(\frac{n_e^2}{n_0^2} - 1 \right) \sin^2 \theta_i} \quad (5.21)$$

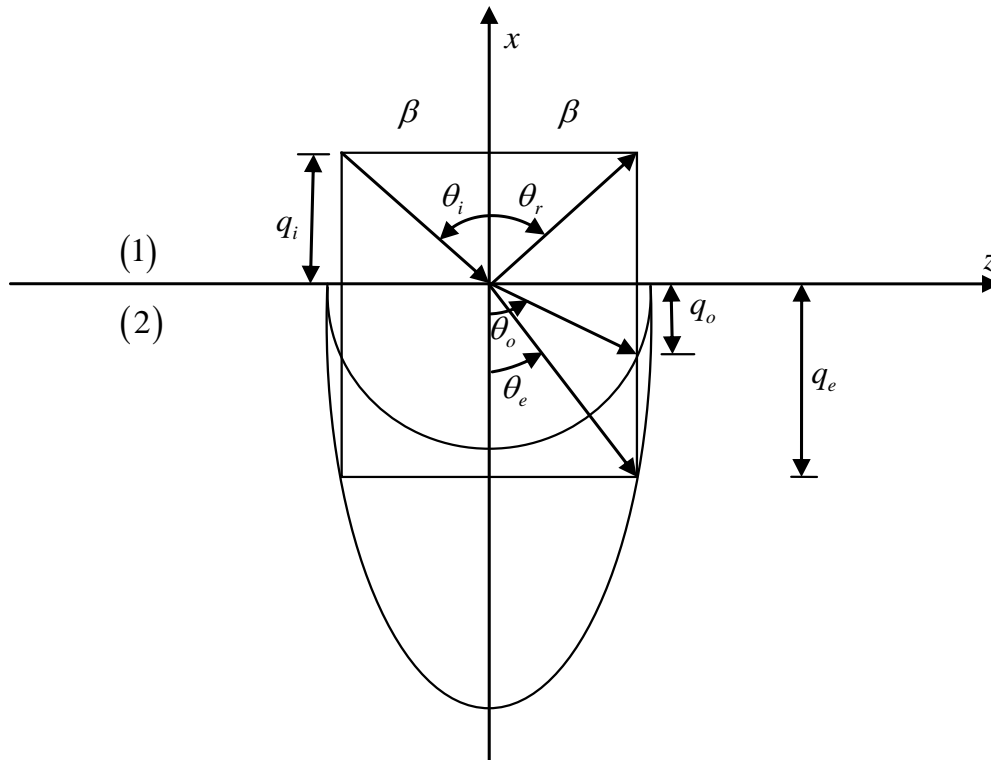


Figura 5.4: Interferência entre o meio (1) isotrópico e o meio (2) cristal uniaxial positivo

5.5 Conclusão

As placas retardadoras são placas transparentes com uma quantidade definida de birrefringência, utilizadas para modificar a polarização da luz. Classificam nomeadamente em três tipos diferentes, meia onda, um quarto de onda e onda completa onde a diferença de fase entre as direcções de polarização são respectivamente π , $\pi / 2$ e 2π . As placas retardadoras podem ser de ordem zero, ou seja $m = 0$, ou de ordem múltipla, com $m \geq 1$. As placas de ordem zero são quase impossível de fabricar por causa de terem espessuras extremamente pequenas, no entanto podem ser construídas a partir de duas placas de ordem múltipla com espessuras manuseáveis. Em relação as placas de ordem de ordem múltipla são fáceis de fabricar, mas apresentam uma desvantagem de terem sensibilidade reduzida a pequenos desvios na frequência em relação a frequência nominal.

Capítulo 6

Conclusões

Este sexto e último capítulo apresenta as conclusões essenciais referentes à esta dissertação de mestrado, fazendo uma síntese face aos objectivos iniciais e sugerindo possíveis trabalhos futuros.

6.1 Conclusão final

Nesta dissertação estudaram-se os fundamentos base da álgebra geométrica, particularizadas para espaços bidimensionais e tridimensionais euclidianos, denominadas por \mathbb{Cl}_2 e \mathbb{Cl}_3 . Definiu-se e estudou-se o produto que caracteriza esta álgebra, o produto geométrico ou de Clifford. Este produto resulta da soma do produto interno com o produto exterior, e é em geral não comutativo, no entanto é associativo e invertível. Em relação ao produto exterior (de Grassmann foi verificado que este é definível em n dimensões e é independentemente de qualquer métrica, ao contrario do produto externo de Gibbs que é definível apenas em três dimensões e necessita de uma métrica. Através do produto exterior surge novos objectos geométricos, o bivector (segmento de plano orientado) resultado do produto exterior de dois vectores, e o trivector (volume orientado) resultado do produto exterior de três vectores. Destaca-se ainda dois operadores de extrema importância tais como os rotores que permitam que se façam rotações espaciais e rotações planares de vectores e as contracções são úteis para definir o produto geométrico de vectores por bivectores e vice-versa.

A álgebra geométrica do espaço euclidiano permite uma completa formulação dos desenvolvimentos das áreas clássicas da Física, principalmente do electromagnetismo.

No âmbito de electromagnetismo, álgebra geométrica mostrou destacar-se da álgebra tensorial pela sua independência de qualquer sistema de coordenadas, onde o conceito de tensor é desnecessário. Com a álgebra geométrica é possível simplificar o estudo da propagação de ondas electromagnéticas num cristal uniaxial e biaxial, sem recorrer as propriedades de matrizes, como outrora se fazia utilizando o cálculo tensorial ou diádico. Torna-se possível determinar os índices de refração para qualquer direcção dos eixos ópticos e qualquer direcção de propagação.

Esta dissertação pretende divulgar a álgebra geométrica como estrutura clara, intuitiva e geométrica, assim como torna-se uma linguagem universal e unificadora para o estudo e aplicação nas diferentes áreas da Física e da Engenharia, neste caso concreto, na sua aplicação aos meios anisotrópicos. Como aplicação nos meios anisotrópicos são analisadas as placas retardadoras de meia onda, um quarto de onda e onda completa.

6.2 Perspectiva de trabalhos futuros

Um trabalho futuro pode-se incidir sobre o uso das vantagens da álgebra geométrica na formulação da electrodinâmica clássica no espaço-tempo Minkowski.

No estudo da propagação de ondas planas monocromáticas, com álgebra geométrica em meios:

- Com anisotropia eléctrica e magnética;
- SNG – meios simplesmente negativos;
- DNG – Duplamente negativos;
- Biisotrópicos;
- Bianisotrópicos.

Referências

- [1] C. Doran and A. Lasenby, “*Geometric Algebra for Physicists*”, (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003).
- [2] D. Hestenes, “*New Foundation for Classical Mechanics*”, (Dordrecht, The Netherlands: kluwer Academic Publishers, 2nd ed., 1999).
- [3] L. Dorst, D. Fontijne, and S. Mann, “*Geometric Algebra for Computer Science*”, (Amsterdam: Morgan Kaufmann Publishers, Elsevier, 2007).
- [4] P. Lounesto, “*Clifford Algebra and Spinors*”, (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2nd ed., 2002).
- [5] C.R. Paiva, “*Álgebra Geométrica do Espaço: Introdução*”, Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Instituto Superior Técnico, 2008.
- [6] C.R. Paiva, “*Aspectos Geométricos do Electromagnetismo*”, Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Instituto Superior Técnico, 2008.
- [7] C.R. Paiva, “*Álgebra Geométrica do Espaço: Aplicações*”, Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Instituto Superior Técnico, 2008/2009.
- [8] C.R. Paiva, “*Meios Anisotrópicos*”, Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Instituto Superior Técnico, 2002/2003.
- [10] C.R. Paiva, “*Meios Anisotrópicos*”, Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Instituto Superior Técnico, 2008/2009.
- [9] S.A. Matos, M.A. Ribeiro and C.R. Paiva, “*Anisotropy without tensors: a novel approach using geometric algebra*”, Optics Express, Vol. 15, No. 23, pp.15175-15186, November 2007.
- [11] S. A. Matos, C. R. Paiva, and A. M. Barbosa, “*Anisotropy done right: a geometric algebra approach*”, Eur. Phys. J. Appl. Phys. 49, 33006 (2010).
- [12] D. Hestenes, “*Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics*”, American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, pp. 104-121, February 2003.
- [13] H. C. Chen, “*Theory of Electromagnetic Waves: A Coordinate-Free Approach*”, New York: McGraw-Hill, 1985.
- [14] J. A. B. Faria, “*Óptica Fundamentos e Aplicações*”, pp. 159-163. Lisboa: Editorial Presença, 1994.

- [15] A. Yariv, “*Optical Electronics in Modern Communications*”, pp. 17-27. New York: Oxford University Press, 1997.
- [16] URL: <http://www.yorku.ca/marko/PHYS2212/Lab8.pdf> . Acedido a 03-06-12.
- [17] URL: http://specialoptics.com/pdf/wp_retardation_plate_theory.pdf . Acedido a 03-06-12.

Apêndice A

Relações úteis envolvendo o operador nabla

Considera-se uma base ortonormada $\mathcal{B} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$, sendo o operador nabla dado por:

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\text{A.1})$$

E ainda o campo vectorial $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$.

Apresentam-se em seguida algumas relações envolvendo o operador nabla ∇ e o campo vectorial \mathbf{a} .

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{a} &= (\nabla \times \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} \\ \nabla \times \mathbf{a} &= -(\nabla \wedge \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} = -\nabla \lrcorner (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) \\ \nabla \wedge (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) &= (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} \\ \nabla \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \wedge \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} + (\nabla \times \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} \\ \nabla (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) &= \nabla \lrcorner (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) + \nabla \wedge (\mathbf{a} \mathbf{e}_{123}) = (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} = (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}_{123} - \nabla \times \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Considera-se agora a presença de outros campos como o campo vectorial $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ e ainda os campos escalares $\Phi_{x,y,z}, \Psi_{x,y,z} \in \mathbb{R}$.

Apresenta-se agora algumas relações envolvendo o operador nabla, os campos vectoriais e os campos escalares acima mencionados.

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{a} &= 0 \\
\nabla \wedge \nabla \Phi &= 0 \\
\nabla \times \nabla \Phi &= 0 \\
\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} &= 0 \\
\mathbf{a} \wedge \nabla \wedge \mathbf{b} &= [\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}] \mathbf{e}_{123} \\
\mathbf{a} \lrcorner \nabla \wedge \mathbf{b} &= -\mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a} \\
\nabla \lrcorner \nabla \wedge \mathbf{a} &= -\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{a} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} \\
\nabla \Phi \Psi &= \Phi \nabla \Psi + \Psi \nabla \Phi \\
\nabla \cdot \Phi \mathbf{a} &= \mathbf{a} \cdot \nabla \Phi + \Psi \nabla \cdot \mathbf{a} \\
\nabla \wedge \Phi \mathbf{a} &= \nabla \Phi \times \mathbf{a} + \Phi \nabla \wedge \mathbf{a} \\
\nabla \times \Phi \mathbf{a} &= \nabla \Phi \times \mathbf{a} + \Phi \nabla \wedge \mathbf{a} \\
\nabla \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = [\mathbf{a} \wedge \nabla \wedge \mathbf{b} - \mathbf{b} \wedge \nabla \wedge \mathbf{a}] \mathbf{e}_{123} \\
\nabla \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= [\nabla \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}] \mathbf{e}_{123} = \mathbf{b} \wedge \nabla \wedge \mathbf{a} - \mathbf{a} \wedge \nabla \wedge \mathbf{b} \\
\nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \lrcorner \nabla \wedge \mathbf{b} - \mathbf{b} \lrcorner \nabla \wedge \mathbf{a} \\
\nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} \\
\nabla \times \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \nabla \cdot \mathbf{b} \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} \\
\nabla \lrcorner \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\nabla \times \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \nabla \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} - \nabla \cdot \mathbf{b} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{A.3}$$